

Der Eindeutigkeitssatz $n = 2$ für kugelsymmetrische Dichteverteilungen

— Bestätigung aus vier Richtungen (Geometrie, Mechanik, Potentialtheorie, Informationstheorie) und die

Darstellung $m = 4\pi$ — [Aufsatz 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026 (Zweite Auflage)

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Für eine kugelsymmetrische Potenzgesetz-Dichteverteilung $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ beweisen wir, dass die pro Kugelschale hinzukommende Masse, $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$, genau dann vom Radius r unabhängig ist, wenn $n = 2$ (Satz 1). Der Beweis braucht nicht mehr als den Vergleich der Werte bei Radius **1** und Radius **2**.

Sodann stellen wir vier Stellen nebeneinander, an denen derselbe Exponent **2** erscheint. In der Gaußschen Flusserhaltung und in der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung lässt das r^2 der Kugeloberfläche $4\pi r^2$ den Fluss pro Flächeneinheit und die Feldstärke wie $1/r^2$ abfallen — dasselbe r^2 wie in Satz 1. In der Sicht des Universum-OS wächst die Bildpunktzahl eines Bildschirms wie $4\pi r^2$, sodass die Datendichte pro Bildpunkt wie $1/r^2$ abfällt. Bertrands Satz (1873) grenzt die Zentralkräfte, für die sich jede gebundene Bahn schließt, auf zwei ein: die Kraft mit inversem Quadrat und die Federkraft. Er ist ein Satz der Mechanik, der Kräfte danach auswählt, **ob sich die Bahnen schließen**, und hier trifft eine andere Auswahl als die Ausbreitung der Fläche beim Kraftexponenten **2** mit den übrigen zusammen.

Ferner ist für $n = 2$ die Masse innerhalb der Einheitskugel $m = 4\pi$, der gesamte Raumwinkel, weil sich r^2 und $1/r^2$ aufheben. Dehnt man dasselbe Integral auf allgemeines n aus, so erhält man $m(n) = 4\pi/(3 - n)$; liest man $S = 1/(3 - n)$ in $m = 4\pi \cdot S$ als „die Zahl der gestapelten Blätter von 4π “, so zeigt sich eine Modul-Treppe, die durch **2π , 4π , 8π , 16π** läuft.

Tragweite (scope note): Der Kern dieses Aufsatzes ist Satz 1, und die Rechnung ist elementar. Eine Dichte $\rho \propto r^{-2}$, deren eingeschlossene Masse wie $m(r) \propto r$ wächst, ist in der Astrophysik als singuläre isotherme Kugel bekannt — dieser Aufsatz formuliert sie als **den einzigen Exponenten, bei dem der Zuwachs pro Schale nicht vom Radius abhängt**, und stellt sie an den Ausgangspunkt des Werks. Das Gaußsche Gesetz, die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung und Bertrands Satz sind sämtlich Standardergebnisse, und die vier Sichtweisen von Abschnitt 3 sind keine vier unabhängigen Beweise. Gauß und Laplace entspringen derselben Kugeloberfläche wie Satz 1, während Bertrands Satz Kräfte nach der Bedingung auswählt, dass sich die Bahnen schließen, und nicht aus der Ausbreitung der Fläche folgt (seine zweite Lösung, die Federkraft, zeigt dies). Die Sicht des Universum-OS ist eine Lesart durch Metapher. Um $\rho = r^{-2}$ als Dichte zu behandeln, sollte man $\rho = k/r^2$ mit einer Konstanten k der Dimension $[M/L]$ schreiben; $m = 4\pi$ ist ihr Wert unter der Wahl der Einheiten $k = 1$ und Radius 1 . Es wird kein neues physikalisches Gesetz behauptet. **Was dieser Aufsatz hinzufügt**, ist, dass eine einzige Bedingung — gleichförmiger Zuwachs pro Schale — den Exponenten auf **2** festlegt; dass er, indem er die verschiedenen Größen nebeneinanderstellt, in denen diese **2** erscheint (Massendichte, Fluss, Feldstärke und Kraft), jene, die aus demselben r^2 stammen, von der einen trennt, die aus einer anderen Auswahl stammt; und dass die Ausdehnung desselben Integrals auf allgemeines n die Treppe $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ und die Blattzahl $S = 1/(3 - n)$ liefert.

1. Problemstellung

Definition 1 (Geometrischer Rahmen)

Wir betrachten eine kugelsymmetrische Potenzgesetz-Dichteverteilung $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, wobei $r = |\mathbf{x}| > 0$ und $n \in \mathbb{R}$. In Kugelkoordinaten (r, θ, φ) lautet das Volumenelement $dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$.

Definition 2 (Massenzuwachsrates der Kugelschale)

Definiert man die innerhalb einer Kugel vom Radius r eingeschlossene Gesamtmasse als

$m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, so ist die Massenzuwachsrates pro Schale beim Radius r definiert als

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

Definition 3 (Gleichförmigkeitsbedingung / Skaleninvarianz)

Der Zustand, in dem die Massenzuwachsrates der Schale einen konstanten Wert $C > 0$ bei jedem Radius $r \in (0, \infty)$ annimmt, wird als „Gleichförmigkeitsbedingung“ bezeichnet.

2. Hauptsatz: Eindeutigkeit von $n = 2$ (analytischer Beweis)

Satz 1 (Eindeutigkeit von $n = 2$)

Sei $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$). Die Massenzuwachsrates der Kugelschale $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ ist genau dann eine konstante Funktion auf $(0, \infty)$, wenn $n = 2$.

Lemma 1 (Konstanz von Potenzfunktionen)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(r) = r^\alpha$ genau dann konstant auf $(0, \infty)$, wenn $\alpha = 0$.

Beweis von Lemma 1

Hinlänglichkeit ($\alpha = 0 \implies f$ ist konstant): Ist $\alpha = 0$, so gilt $f(r) = r^0 = 1$ identisch.

Notwendigkeit (f konstant $\implies \alpha = 0$): Wir beweisen die Kontraposition. Angenommen $\alpha \neq 0$. Vergleicht man die Werte bei $r = 1$ und $r = 2$: $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$. Die Exponentialfunktion $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, da $\ln 2 > 0$. Daher gilt $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, sodass $f(r)$ nicht konstant ist.

Beweis von Satz 1

Die Massenzuwachsrates der Schale ist $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$. Da $4\pi > 0$, ist die Konstanz von dm/dr äquivalent zur Konstanz von r^{2-n} auf $(0, \infty)$. Nach Lemma 1 gilt $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$. Für $n = 2$ ist $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (konstant).

3. Vier Stellen, an denen der Exponent 2 erscheint

3.1 Der Gaußsche Weg — Geometrie und Flusserhaltung

Im dreidimensionalen Raum beträgt die Oberfläche einer Kugel vom Radius r gerade $S(r) = 4\pi r^2$. Tritt ein erhaltener Fluss Φ_{total} vom Zentrum aus in alle Richtungen aus, so fällt der Fluss pro Flächeneinheit $j(r)$ umgekehrt zum Anwachsen der Oberfläche ab:

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

Das hier wirkende r^2 ist dasselbe r^2 der Kugeloberfläche wie jenes in $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ von Satz 1.

3.2 Der Laplace-/Greensche Weg — Potentialtheorie und die Fundamentallösung

Im freien dreidimensionalen Raum ist die Fundamentallösung (Greensche Funktion) der Laplace-Gleichung $\nabla^2 \Phi = 0$ für eine Punktquelle $\Phi(r) \propto 1/r$. Bildet man ihren Gradienten, so ist die Feldstärke

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Das $1/r$ der Fundamentallösung ist selbst dadurch festgelegt, dass der Fluss der Punktquelle die Kugel vom Radius r durchsetzt; seine Wurzel ist also dieselbe wie die des Gaußschen Weges.

3.3 Der Universum-OS-Weg — Informationsdichte und Rendering-Bandbreite

Betrachtet man das Universum als informationsverarbeitendes System (OS), so wächst die Bildpunktzahl eines Anzeigebildschirms (UI) vom Radius r proportional zur Oberfläche $4\pi r^2$. Um die gesamte Rendering-Last und die Kommunikationsbandbreite konstant zu halten (ein Ausdünnungsprozess), muss die Datendichte $\rho(r)$ pro Bildpunkt umgekehrt proportional zur Ausdehnung des Bildschirms sein:

$$\text{Gesamtlast} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Dies formuliert die Bedingung von Satz 1, „ $4\pi r^2 \rho$ ist konstant“, in der Sprache des Renderings um.

3.4 Der Bertrandsche Weg — Kräfte, deren Bahnen sich schließen

Nach Bertrands Satz (1873) schließt sich unter den Zentralkraftfeldern jede gebundene Bahn nur dann, wenn das Potential $V(r) \propto r^\beta$ den Wert $\beta = -1$ (die Kraft mit inversem Quadrat $F \propto 1/r^2$) oder $\beta = 2$ (die Federkraft $F \propto r$, der harmonische Oszillator) hat. Dass sich die Bahnen unter der Kraft mit inversem Quadrat schließen, liegt daran, dass neben dem Drehimpuls eine weitere Größe erhalten ist — der Laplace–Runge–Lenz-Vektor —, eine verborgene Symmetrie, die nur $n = 2$ eigen ist (Aufsatz 79).

Das Kriterium, nach dem dieser Satz auswählt, ist, **ob sich die Bahnen schließen**. Es folgt nicht aus der Ausbreitung der Kugeloberfläche — seine zweite Lösung, die Federkraft, wird ohne jeden Bezug auf die Flusserhaltung ausgewählt. Dass die Kraft um eine Punktmasse im dreidimensionalen Raum ein inverses Quadrat ist (Gaußscher Weg) und dass sich die Bahnen unter der Kraft mit inversem Quadrat schließen (Bertrand), sind **zwei getrennte Auswahlen, die sich beim Kraftexponenten 2 treffen**.

Die **2** hier ist der Exponent der Kraft, nicht der Exponent der Massendichte in Satz 1. Für eine Verteilung, deren Massendichte selbst $\rho = k/r^2$ ist, ist die eingeschlossene Masse proportional zum Radius, sodass die Kraft wie $1/r$ geht:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ ist die Masse des Probeteilchens). Diese Kraft ist keine der beiden Lösungen Bertrands.

3.5 Wie die vier Sichtweisen zusammenhängen

Von den vier gewinnen die drei Wege von Gauß, Laplace und dem Universum-OS $1/r^2$ aus **derselben Kugeloberfläche $4\pi r^2$** wie Satz 1. Allein Bertrand wählt nach einem anderen Kriterium — dem Schließen der Bahnen — und stößt beim Kraftexponenten **2** zu ihnen. Der Exponent **2** erscheint an vier Stellen, aber was er zählt, ist jedes Mal verschieden: Massendichte, Fluss, Feldstärke und Kraft.

4. Mehrfachintegral-Beweis der Grenzmasse $m = 4\pi$

Satz 2 (Aufhebung zur Grenzmasse $m = 4\pi$)

Für $n = 2$, d. h. $\rho(r) = 1/r^2$, hebt sich bei der Gesamtmasse m über die Einheitskugel $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ die Abstandsabhängigkeit auf, und sie ist gleich dem gesamten Raumwinkel 4π .

Beweis.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. $m(n)$ als Modul-Treppe

Führt man das obige Integral für ein allgemeines n aus, so beträgt die Gesamtmasse innerhalb der Einheitskugel

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Löst man nach demjenigen n auf, bei dem m einen Modulwert $2^k\pi$ annimmt, so erhält man die geschlossene Form

$$n = 3 - 2^{2-k}.$$

Modul	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	$5/2$	25.1327
16π	$11/4$	50.2655

Das heißt: Eine einzige Familie $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ erzeugt die Modul-Treppe, und der Exponent n wählt aus, auf welchem Modul sie landet.

5.1 Blattzahl-Darstellung: $3 - n$ ist der Kehrwert der Blattzahl

Schreibt man das Obige als $m = 4\pi \cdot S$, so ergibt sich

$$S = \frac{1}{3-n} \quad \text{d.\,h.} \quad 3-n = \frac{1}{S}.$$

Liest man S als „wie viele Blätter von 4π gestapelt sind“, so nimmt die Treppe die folgende Form an.

n	$3-n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Deutung
0	3	$1/3$	$4\pi/3$	Volumen der Einheitskugel
1	2	$1/2$	2π	Hälfte von 4π
2	1	1	4π	Ein Blatt von 4π
$5/2$	$1/2$	2	8π	Zwei Blätter von 4π (Vorder- und Rückseite)
$11/4$	$1/4$	4	16π	Vier Blätter von 4π
$23/8$	$1/8$	8	32π	Acht Blätter von 4π

Der Exponent n bestimmt die Anzahl der übereinanderliegenden Blätter. In dieser Darstellung ist $n = 2$ der Fall „genau ein Blatt“.

Die Treppenglieder 2π , 4π , 8π stimmen mit den Konstanten überein, die das Werk als Module behandelt hat (Aufsatz 13).

5.2 Warum $16\pi^2$ nicht auf dieser Treppe liegt

Aufsatz 13 führt auch $16\pi^2$ als Modul auf, doch es liegt außerhalb dieser Familie. In Blättern ausgedrückt,

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

sodass die Blattzahl selbst π enthält und keine ganze Zahl von Blättern ist. Mit anderen Worten: $16\pi^2$ ist keine Größe, die durch Stapeln von 4π erreichbar ist.

Der Unterschied zwischen 16π und $16\pi^2$:

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — **Stapelung** (vier Blätter). Es ist ein Glied dieser Treppe.
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — **Produkt** (ein direktes Produkt von Raumwinkeln). Es liegt nicht auf dieser Treppe.

Die beiden unterscheiden sich nicht nur numerisch, sondern in der **Erzeugungsregel**. $16\pi^2$ entspringt dem direkten Produkt $(4\pi)^2$ oder der Normierung eines topologischen Index (Aufsätze 29 und 32) usw. — einer anderen Abstammung. Größen verschiedenen Ursprungs nicht in derselben Familie zu zählen, ist die Disziplin von Aufsatz 48.

5.3 Eine offene Frage: der Ursprung des Faktors 2

$S = 2(8\pi)$ wird in diesem Werk als „zwei Blätter, Vorder- und Rückseite“ gelesen. Andererseits hat der Faktor 2 im 8π der Einstein-Gleichung $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ einen konkreten Ursprung im Newtonschen Grenzfall, $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ (der aus der Linearisierung und der Spurumkehr entsteht, die zur Übereinstimmung mit $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ erforderlich sind).

Ob diese beiden „2“ einen gemeinsamen Ursprung haben, wird in diesem Aufsatz nicht entschieden. Findet sich ein Weg, der sie verbindet, so wird daraus eine Behauptung; wenn nicht, bleibt es ein numerischer Zufall. **Wir lassen es als offene Frage stehen.**

6. Fazit

Dieser Aufsatz hat Folgendes gezeigt.

1. Die Massenzuwachsrates der Kugelschale $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ ist auf $(0, \infty)$ nur für $n = 2$ konstant (Satz 1).

2. Der Exponent **2** erscheint an vier Stellen: in der Gaußschen Flusserhaltung, in der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, in der Bandbreitengrenze der Informationsdichte und in Bertrands Satz. Die ersten drei entspringen derselben Kugeloberfläche wie Satz 1; Bertrand gelangt durch eine andere Auswahl, die Bedingung, dass sich die Bahnen schließen, zum Kraftexponenten **2**.
3. Für $n = 2$ ist die Masse innerhalb der Einheitskugel $m = 4\pi$, d. h. sie **stimmt mit dem gesamten Raumwinkel überein**. Im Allgemeinen ist $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, und n wählt den Landepunkt auf der Modul-Treppe.

Eine einzige Bedingung — dass der Zuwachs pro Schale nicht vom Radius abhängt — legt den Exponenten auf **2** fest. Dehnt man dasselbe Integral in n aus, so kommt eine Treppe in Sicht, die zählt, wie viele Blätter von 4π gestapelt sind.

Revisionsprotokoll

Zweite Auflage (September 2026): Die Form wurde an die aktuelle Vorlage angeglichen (eine Tragweite-Anmerkung direkt nach der Zusammenfassung, und DOIs bei den Verweisen auf das Werk). Der Bertrand-Abschnitt in Abschnitt 3 wurde neu geschrieben — die erste Auflage beschrieb Bertrands Satz als „aus derselben Tatsache folgend, dass die Kugeloberfläche wie r^2 wächst“ und als „die dynamische Notwendigkeit dafür, dass ein Himmelssystem stabil fortbesteht“, während der Satz ein Satz der Mechanik ist, der die Kräfte auswählt, deren Bahnen sich schließen. Der Titel von Bertrand (1873) und der Verlag von Carr (1886) in der Literatur wurden berichtet. Die Namen der Winkelvariablen im Beweis von Abschnitt 4 wurden an die Definition in Abschnitt 1 angeglichen.

Literatur

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Aufsatz 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [Aufsatz 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [Aufsatz 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Aufsatz 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [Aufsatz 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Lizenziert unter Creative Commons Namensnennung 4.0 International (CC BY 4.0)