

El teorema de unicidad de $n = 2$ para distribuciones de densidad con simetría esférica

— Confirmación desde cuatro direcciones (geometría, mecánica, teoría del potencial, teoría de la información) y la representación $m = 4\pi$ — [Artículo 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japón
Septiembre de 2026 (Segunda edición)

— *From thinking to syncing.* —

Resumen

Para una distribución de densidad de ley de potencias con simetría esférica $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$, demostramos que la masa añadida por capa esférica, $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$, es independiente del radio r si y solo si $n = 2$ (Teorema 1). La demostración no necesita más que comparar los valores en el radio 1 y en el radio 2.

A continuación ponemos lado a lado cuatro lugares donde aparece el mismo exponente 2. En la conservación del flujo de Gauss y en la solución fundamental de la ecuación de Laplace, el r^2 del área de la superficie esférica $4\pi r^2$ hace que el flujo por unidad de área y la intensidad del campo decaigan como $1/r^2$ — el mismo r^2 que en el Teorema 1. En la visión del OS del Universo, el número de píxeles de una pantalla crece como $4\pi r^2$, de modo que la densidad de datos por píxel decae como $1/r^2$. El teorema de Bertrand (1873) reduce a dos las fuerzas centrales para las que toda órbita acotada se cierra: la fuerza del inverso del cuadrado y la fuerza de un resorte. Es un teorema de la mecánica que selecciona fuerzas según **si las órbitas se cierran**, y aquí una selección distinta de la expansión del área se encuentra con las demás en el exponente de la fuerza 2.

Además, cuando $n = 2$ la masa dentro de la bola unidad es $m = 4\pi$, el ángulo sólido total, porque r^2 y $1/r^2$ se cancelan. Extendiendo la misma integral a un n general se obtiene $m(n) = 4\pi/(3-n)$; leyendo $S = 1/(3-n)$ en $m = 4\pi \cdot S$ como «el número de hojas de 4π apiladas», aparece una escalera de módulos que recorre $2\pi, 4\pi, 8\pi, 16\pi$.

Alcance (scope note): El núcleo de este artículo es el Teorema 1, y el cálculo es elemental. Una densidad $\rho \propto r^{-2}$, cuya masa encerrada crece como $m(r) \propto r$, se conoce en astrofísica como la esfera isoterma singular; este artículo la enuncia como **el único exponente para el que el crecimiento por capa no depende del radio** y la sitúa en el punto de partida del corpus. La ley de Gauss, la solución fundamental de la ecuación de Laplace y el teorema de Bertrand son todos resultados estándar, y las cuatro visiones de la Sección 3 no son cuatro demostraciones independientes. Gauss y Laplace provienen de la misma área de la superficie esférica que el Teorema 1, mientras que el teorema de Bertrand selecciona fuerzas por la condición de que las órbitas se cierren y no se sigue de la expansión del área (su segunda solución, la fuerza de un resorte, lo muestra). La visión del OS del Universo es una lectura mediante metáfora. Para tratar $\rho = r^{-2}$ como densidad hay que escribir $\rho = k/r^2$ con una constante k de dimensión $[M/L]$; $m = 4\pi$ es su valor bajo la elección de unidades $k = 1$ y radio 1. No se afirma ninguna ley física nueva. **Lo que este artículo añade** es que una sola condición — el crecimiento uniforme por capa — fija el exponente en **2**; que, al poner lado a lado las distintas magnitudes en las que aparece este **2** (densidad de masa, flujo, intensidad del campo y fuerza), separa las que provienen del mismo r^2 de la que proviene de una selección distinta; y que extender la misma integral a un n general produce la escalera $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ y el número de hojas $S = 1/(3 - n)$.

1. Formulación del problema

Definición 1 (Planteamiento geométrico)

Consideremos una distribución de densidad de ley de potencias con simetría esférica $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$, donde $r = |\mathbf{x}| > 0$ y $n \in \mathbb{R}$. En coordenadas esféricas (r, θ, φ) , el elemento de volumen es $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Definición 2 (Tasa de crecimiento de masa de la capa esférica)

Definiendo la masa total encerrada dentro de una esfera de radio r como $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, la tasa de crecimiento de masa por capa en el radio r se define como

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

Definición 3 (Condición de uniformidad / invariancia de escala)

El estado en que la tasa de crecimiento de masa de la capa toma un valor constante $C > 0$ en todo radio $r \in (0, \infty)$ se denomina «condición de uniformidad».

2. Teorema principal: unicidad de $n = 2$ (demostración analítica)

Teorema 1 (Unicidad de $n = 2$)

Sea $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$). La tasa de crecimiento de masa de la capa esférica $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ es una función constante en $(0, \infty)$ si y solo si $n = 2$.

Lema 1 (Constancia de las funciones potencia)

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $f(r) = r^\alpha$ es constante en $(0, \infty)$ si y solo si $\alpha = 0$.

Demostración del Lema 1

Suficiencia ($\alpha = 0 \implies f$ es constante): si $\alpha = 0$, entonces $f(r) = r^0 = 1$ idénticamente.

Necesidad (f constante $\implies \alpha = 0$): demostramos el contrarrecíproco. Supongamos $\alpha \neq 0$. Comparando los valores en $r = 1$ y $r = 2$: $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$. La exponencial $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ puesto que $\ln 2 > 0$. Por tanto $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, de modo que $f(r)$ no es constante.

Demostración del Teorema 1

La tasa de crecimiento de masa de la capa es $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$. Como $4\pi > 0$, que dm/dr sea constante equivale a que r^{2-n} sea constante en $(0, \infty)$. Por el Lema 1, $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$. Cuando $n = 2$, $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (constante).

3. Cuatro lugares donde aparece el exponente 2

3.1 La vía de Gauss — geometría y conservación del flujo

En el espacio tridimensional, el área de la superficie de una esfera de radio r es $S(r) = 4\pi r^2$. Cuando un flujo conservado Φ_{total} sale del centro en todas las direcciones, el flujo por unidad de área $j(r)$ decae en proporción inversa al crecimiento del área:

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

El r^2 que actúa aquí es el mismo r^2 del área de la superficie esférica que el de $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ del Teorema 1.

3.2 La vía de Laplace / Green — teoría del potencial y la solución fundamental

En el espacio libre tridimensional, la solución fundamental (función de Green) de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ para una fuente puntual es $\Phi(r) \propto 1/r$. Tomando su gradiente, la intensidad del campo es

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

El $1/r$ de la solución fundamental está fijado a su vez por el flujo de la fuente puntual que atraviesa la esfera de radio r , así que su raíz es la misma que la de la vía de Gauss.

3.3 La vía del OS del Universo — densidad de información y ancho de banda de renderizado

Si se considera el universo como un sistema de procesamiento de información (OS), el número de píxeles de una pantalla (UI) de radio r crece en proporción al área $4\pi r^2$. Para mantener constantes la carga total de renderizado y el ancho de banda de comunicación (un proceso de descarte), la densidad de datos $\rho(r)$ por píxel debe ser inversamente proporcional a la extensión de la pantalla:

$$\text{Carga total} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Esto reformula la condición del Teorema 1, « $4\pi r^2 \rho$ es constante», en el lenguaje del renderizado.

3.4 La vía de Bertrand — fuerzas cuyas órbitas se cierran

Por el teorema de Bertrand (1873), entre los campos de fuerzas centrales, toda órbita acotada se cierra solo cuando el potencial $V(r) \propto r^\beta$ tiene $\beta = -1$ (la fuerza del inverso del cuadrado $F \propto 1/r^2$) o $\beta = 2$ (la fuerza de un resorte $F \propto r$, el oscilador armónico). La razón por la que las órbitas se cierran bajo la fuerza del inverso del cuadrado es que, además del momento angular, se conserva una magnitud más — el vector de Laplace–Runge–Lenz —, una simetría oculta propia de $n = 2$ (Artículo 79).

El criterio con el que selecciona este teorema es **si las órbitas se cierran**. No se sigue de la expansión del área de la superficie esférica: su segunda solución, la fuerza de un resorte, se selecciona sin referencia alguna a la conservación del flujo. Que la fuerza alrededor de una masa puntual en tres dimensiones sea del inverso del cuadrado (vía de Gauss) y que las órbitas se cierren bajo la fuerza del inverso del cuadrado (Bertrand) son **dos selecciones separadas que se encuentran en el exponente de la fuerza 2**.

El **2** de aquí es el exponente de la fuerza, no el exponente de la densidad de masa del Teorema 1. Para una distribución cuya densidad de masa es ella misma $\rho = k/r^2$, la masa encerrada es proporcional al radio, de modo que la fuerza va como $1/r$:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ es la masa de la partícula de prueba). Esta fuerza no es ninguna de las dos soluciones de Bertrand.

3.5 Cómo se relacionan las cuatro visiones

De las cuatro, las tres vías de Gauss, de Laplace y del OS del Universo obtienen $1/r^2$ de **la misma área de la superficie esférica $4\pi r^2$** que el Teorema 1. Solo Bertrand selecciona con un criterio distinto — el cierre de las órbitas — y se une a ellas en el exponente de la fuerza **2**. El exponente **2** aparece en cuatro lugares, pero lo que cuenta es distinto cada vez: densidad de masa, flujo, intensidad del campo y fuerza.

4. Demostración por integral múltiple de la masa límite $m = 4\pi$

Teorema 2 (Cancelación hacia la masa límite $m = 4\pi$)

Cuando $n = 2$, es decir, $\rho(r) = 1/r^2$, la masa total m sobre la bola unidad $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ ve cancelada su dependencia de la distancia y es igual al ángulo sólido total 4π .

Demostración.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. $m(n)$ como escalera de módulos

Realizando la integral anterior para un n general, la masa total dentro de la bola unidad es

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Despejando el n para el que m toma un valor de módulo $2^k\pi$ se obtiene la forma cerrada

$n = 3 - 2^{2-k}.$

Módulo	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	$5/2$	25.1327
16π	$11/4$	50.2655

Es decir, una sola familia $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ genera la escalera de módulos, y el exponente n selecciona en qué módulo aterriza.

5.1 Representación por número de hojas: $3 - n$ es el recíproco del número de hojas

Escribiendo lo anterior como $m = 4\pi \cdot S$ se obtiene

$S = \frac{1}{3-n}$

es decir

$3-n = \frac{1}{S}.$

Leyendo S como «cuántas hojas de 4π están apiladas», la escalera toma la forma siguiente.

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Lectura
0	3	1/3	$4\pi/3$	Volumen de la bola unidad
1	2	1/2	2π	Mitad de 4π
2	1	1	4π	Una hoja de 4π
$5/2$	$1/2$	2	8π	Dos hojas de 4π (anverso y reverso)
$11/4$	$1/4$	4	16π	Cuatro hojas de 4π
$23/8$	$1/8$	8	32π	Ocho hojas de 4π

El exponente n determina el número de hojas superpuestas. En esta representación, $n = 2$ es el caso de «exactamente una hoja».

Los términos de la escalera 2π , 4π , 8π coinciden con las constantes que el corpus ha tratado como módulos (Artículo 13).

5.2 Por qué $16\pi^2$ no está en esta escalera

El Artículo 13 también enumera $16\pi^2$ como módulo, pero **queda fuera de esta familia**. Expresado en hojas,

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

de modo que **el propio número de hojas contiene π** y no es un número entero de hojas. Dicho de otro modo, **$16\pi^2$ no es una magnitud alcanzable apilando 4π** .

La distinción entre 16π y $16\pi^2$:

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — **apilamiento** (cuatro hojas). Es un término de esta escalera.
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — **producto** (un producto directo de ángulos sólidos). No está en esta escalera.

Ambos difieren no solo numéricamente sino en la **regla de generación**. $16\pi^2$ procede del producto directo $(4\pi)^2$, o de la normalización de un índice topológico (Artículos 29 y 32), etc. — otro linaje. No contar en la misma familia magnitudes de origen distinto es la disciplina del Artículo 48.

5.3 Una pregunta abierta: el origen del factor 2

$S = 2(8\pi)$ se lee en este corpus como «dos hojas, anverso y reverso». Por otra parte, el factor 2 del 8π de la ecuación de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ tiene un **origen concreto en el límite newtoniano**, $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ (que surge de la linealización y de la inversión de traza necesarias para coincidir con $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$).

Si estos dos «2» comparten origen no se decide en este artículo. Si se encuentra un camino que los conecte, se convierte en una afirmación; si no, sigue siendo una coincidencia numérica. **Lo dejamos como pregunta abierta.**

6. Conclusión

Este artículo ha mostrado lo siguiente.

1. La tasa de crecimiento de masa de la capa esférica $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ es constante en $(0, \infty)$ solo para $n = 2$ (Teorema 1).

2. El exponente **2** aparece en cuatro lugares: la conservación del flujo de Gauss, la solución fundamental de la ecuación de Laplace, el límite de ancho de banda de la densidad de información y el teorema de Bertrand. Los tres primeros provienen de la misma área de la superficie esférica que el Teorema 1; Bertrand llega al exponente de la fuerza **2** por una selección distinta, la condición de que las órbitas se cierran.
3. Cuando $n = 2$, la masa dentro de la bola unidad es $m = 4\pi$, es decir, **coincide con el ángulo sólido total**. En general $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, y n selecciona el punto de aterrizaje en la escalera de módulos.

Una sola condición — que el crecimiento por capa no dependa del radio — fija el exponente en **2**. Extender la misma integral en n deja ver una escalera que cuenta cuántas hojas de 4π están apiladas.

Registro de revisiones

Segunda edición (septiembre de 2026): La forma se ajustó a la plantilla actual (una nota de alcance situada justo después del resumen, y DOI añadidos a las referencias del corpus). Se reescribió el apartado de Bertrand de la Sección 3: la primera edición describía el teorema de Bertrand como «consecuencia del mismo hecho de que el área esférica crece como r^2 » y como «la necesidad dinámica para que un sistema celeste persista de forma estable», mientras que el teorema es un teorema de la mecánica que selecciona las fuerzas cuyas órbitas se cierran. Se corrigieron el título de Bertrand (1873) y la editorial de Carr (1886) en las referencias. Los nombres de las variables angulares en la demostración de la Sección 4 se ajustaron a la definición de la Sección 1.

Referencias

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Artículo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [Artículo 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [Artículo 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Artículo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [Artículo 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Bajo licencia Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)