

Le théorème d'unicité de $n = 2$ pour les distributions de densité à symétrie sphérique

— Confirmation selon quatre directions (géométrie, mécanique, théorie du potentiel, théorie de l'information)
et la représentation $m = 4\pi$ — [Article 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

Pour une distribution de densité en loi de puissance à symétrie sphérique $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, nous démontrons que la masse ajoutée par couche sphérique, $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$, est indépendante du rayon r si et seulement si $n = 2$ (Théorème 1). La démonstration ne demande rien de plus que de comparer les valeurs au rayon 1 et au rayon 2.

Nous mettons ensuite côte à côte quatre endroits où apparaît le même exposant 2. Dans la conservation du flux de Gauss et dans la solution fondamentale de l'équation de Laplace, le r^2 de l'aire de la sphère $4\pi r^2$ fait décroître le flux par unité d'aire et l'intensité du champ comme $1/r^2$ — le même r^2 que dans le Théorème 1. Dans la vue de l'OS de l'Univers, le nombre de pixels d'un écran croît comme $4\pi r^2$, de sorte que la densité de données par pixel décroît comme $1/r^2$. Le théorème de Bertrand (1873) réduit à deux les forces centrales pour lesquelles toute orbite liée se referme : la force en inverse du carré et la force de ressort. C'est un théorème de mécanique qui sélectionne les forces selon **que les orbites se referment ou non**, et ici une sélection différente de l'étalement de l'aire rejoint les autres à l'exposant de force 2.

De plus, pour $n = 2$, la masse contenue dans la boule unité est $m = 4\pi$, l'angle solide total, parce que r^2 et $1/r^2$ se compensent. En étendant la même intégrale à un n quelconque, on obtient $m(n) = 4\pi/(3-n)$; en lisant $S = 1/(3-n)$ dans $m = 4\pi \cdot S$ comme « le nombre de feuilles de 4π empilées », on voit apparaître un escalier de modules qui passe par $2\pi, 4\pi, 8\pi, 16\pi$.

Portée (scope note) : Le cœur de cet article est le Théorème 1, et le calcul est élémentaire. Une densité $\rho \propto r^{-2}$, dont la masse contenue croît comme $m(r) \propto r$, est connue en astrophysique sous le nom de sphère isotherme singulière — cet article l'énonce comme **l'unique exposant pour lequel la croissance par couche ne dépend pas du rayon** et la place au point de départ du corpus. La loi de Gauss, la solution fondamentale de l'équation de Laplace et le théorème de Bertrand sont tous des résultats standard, et les quatre vues de la Section 3 ne sont pas quatre démonstrations indépendantes. Gauss et Laplace proviennent de la même aire de la sphère que le Théorème 1, tandis que le théorème de Bertrand sélectionne les forces par la condition que les orbites se referment et ne découle pas de l'étalement de l'aire (sa seconde solution, la force de ressort, le montre). La vue de l'OS de l'Univers est une lecture par métaphore. Pour traiter $\rho = r^{-2}$ comme une densité, il faut écrire $\rho = k/r^2$ avec une constante k de dimension $[M/L]$; $m = 4\pi$ est sa valeur sous le choix d'unités $k = 1$ et rayon 1. Aucune loi physique nouvelle n'est revendiquée. **Ce que cet article ajoute**, c'est qu'une seule condition — une croissance uniforme par couche — fixe l'exposant à 2 ; qu'en mettant côte à côte les grandeurs distinctes où ce 2 apparaît (densité de masse, flux, intensité du champ et force), il sépare celles qui viennent du même r^2 de celle qui vient d'une sélection différente ; et qu'étendre la même intégrale à un n quelconque donne l'escalier $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ et le nombre de feuilles $S = 1/(3 - n)$.

1. Position du problème

Définition 1 (Cadre géométrique)

Considérons une distribution de densité en loi de puissance à symétrie sphérique $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, où $r = |\mathbf{x}| > 0$ et $n \in \mathbb{R}$. En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , l'élément de volume est $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Définition 2 (Taux de croissance de la masse d'une couche sphérique)

En définissant la masse totale contenue dans une sphère de rayon r par $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, le taux de croissance de la masse par couche au rayon r est défini par

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

Définition 3 (Condition d'uniformité / invariance d'échelle)

L'état dans lequel le taux de croissance de la masse de la couche prend une valeur constante $C > 0$ en tout rayon $r \in (0, \infty)$ est appelé « condition d'uniformité ».

2. Théorème principal : unicité de $n = 2$ (démonstration analytique)

Théorème 1 (Unicité de $n = 2$)

Soit $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$). Le taux de croissance de la masse de la couche sphérique $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ est une fonction constante sur $(0, \infty)$ si et seulement si $n = 2$.

Lemme 1 (Constance des fonctions puissance)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f(r) = r^\alpha$ est constante sur $(0, \infty)$ si et seulement si $\alpha = 0$.

Démonstration du Lemme 1

Suffisance ($\alpha = 0 \implies f$ est constante) : si $\alpha = 0$, alors $f(r) = r^0 = 1$ identiquement.

Nécessité (f constante $\implies \alpha = 0$) : nous démontrons la contraposée. Supposons $\alpha \neq 0$. En comparant les valeurs en $r = 1$ et $r = 2$: $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$. L'exponentielle $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $\ln 2 > 0$. Donc $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, de sorte que $f(r)$ n'est pas constante.

Démonstration du Théorème 1

Le taux de croissance de la masse de la couche est $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$. Comme $4\pi > 0$, la constance de dm/dr équivaut à la constance de r^{2-n} sur $(0, \infty)$. Par le Lemme 1, $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$. Pour $n = 2$, $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (constante).

3. Quatre endroits où apparaît l'exposant 2

3.1 La voie de Gauss — géométrie et conservation du flux

Dans l'espace tridimensionnel, l'aire d'une sphère de rayon r est $S(r) = 4\pi r^2$. Lorsqu'un flux conservé Φ_{total} part du centre dans toutes les directions, le flux par unité d'aire $j(r)$ décroît en raison inverse de la croissance de l'aire :

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

Le r^2 à l'œuvre ici est le même r^2 de l'aire de la sphère que celui de $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ dans le Théorème 1.

3.2 La voie de Laplace / Green — théorie du potentiel et solution fondamentale

Dans l'espace libre tridimensionnel, la solution fondamentale (fonction de Green) de l'équation de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ pour une source ponctuelle est $\Phi(r) \propto 1/r$. En prenant son gradient, l'intensité du champ est

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Le $1/r$ de la solution fondamentale est lui-même fixé par le flux de la source ponctuelle qui traverse la sphère de rayon r ; sa racine est donc la même que celle de la voie de Gauss.

3.3 La voie de l'OS de l'Univers — densité d'information et bande passante de rendu

Si l'on considère l'univers comme un système de traitement de l'information (OS), le nombre de pixels d'un écran d'affichage (UI) de rayon r croît proportionnellement à l'aire $4\pi r^2$. Pour maintenir constantes la charge totale de rendu et la bande passante de communication (un processus d'élagage), la densité de données $\rho(r)$ par pixel doit être inversement proportionnelle à l'étendue de l'écran :

$$\text{Charge totale} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Ceci reformule la condition du Théorème 1, « $4\pi r^2 \rho$ est constant », dans le langage du rendu.

3.4 La voie de Bertrand — les forces dont les orbites se referment

D'après le théorème de Bertrand (1873), parmi les champs de forces centrales, toute orbite liée ne se referme que lorsque le potentiel $V(r) \propto r^\beta$ a $\beta = -1$ (la force en inverse du carré $F \propto 1/r^2$) ou $\beta = 2$ (la force de ressort $F \propto r$, l'oscillateur harmonique). Si les orbites se referment sous la force en inverse du carré, c'est qu'en plus du moment cinétique une grandeur supplémentaire est conservée — le vecteur de Laplace–Runge–Lenz —, une symétrie cachée propre à $n = 2$ (Article 79).

Le critère selon lequel ce théorème sélectionne est **que les orbites se referment ou non**. Il ne découle pas de l'étalement de l'aire de la sphère — sa seconde solution, la force de ressort, est sélectionnée sans aucune référence à la conservation du flux. Que la force autour d'une masse ponctuelle en trois dimensions soit en inverse du carré (voie de Gauss) et que les orbites se referment sous la force en inverse du carré (Bertrand) sont **deux sélections séparées qui se rejoignent à l'exposant de force 2**.

Le **2** ici est l'exposant de la force, non l'exposant de la densité de masse du Théorème 1. Pour une distribution dont la densité de masse elle-même est $\rho = k/r^2$, la masse contenue est proportionnelle au rayon, de sorte que la force varie comme $1/r$:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ est la masse de la particule d'épreuve). Cette force n'est aucune des deux solutions de Bertrand.

3.5 Comment les quatre vues se relient

Des quatre, les trois voies de Gauss, de Laplace et de l'OS de l'Univers obtiennent $1/r^2$ à partir de **la même aire de la sphère $4\pi r^2$** que le Théorème 1. Seul Bertrand sélectionne selon un critère différent — la fermeture des orbites — et les rejoint à l'exposant de force **2**. L'exposant **2** apparaît en quatre endroits, mais ce qu'il compte diffère chaque fois : densité de masse, flux, intensité du champ et force.

4. Démonstration par intégrale multiple de la masse limite $m = 4\pi$

Théorème 2 (Compensation jusqu'à la masse limite $m = 4\pi$)

Pour $n = 2$, c'est-à-dire $\rho(r) = 1/r^2$, la masse totale m sur la boule unité $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ voit sa dépendance en distance se compenser et est égale à l'angle solide total 4π .

Démonstration.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. $m(n)$ comme escalier de modules

En effectuant l'intégrale ci-dessus pour un n quelconque, la masse totale dans la boule unité est

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

En résolvant pour le n auquel m prend une valeur de module $2^k\pi$, on obtient la forme close

$n = 3 - 2^{2-k}.$

Module	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	$5/2$	25.1327
16π	$11/4$	50.2655

Autrement dit, **une seule famille $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ engendre l’escalier de modules, et l’exposant n choisit le module sur lequel elle se pose.**

5.1 Représentation par nombre de feuilles : $3 - n$ est l’inverse du nombre de feuilles

En écrivant ce qui précède sous la forme $m = 4\pi \cdot S$, on obtient

$S = \frac{1}{3-n}$

c.-à-d.

$3 - n = \frac{1}{S}.$

En lisant S comme « combien de feuilles de 4π sont empilées », l’escalier prend la forme suivante.

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Lecture
0	3	1/3	$4\pi/3$	Volume de la boule unité
1	2	1/2	2π	Moitié de 4π
2	1	1	4π	Une feuille de 4π
$5/2$	1/2	2	8π	Deux feuilles de 4π (recto et verso)
$11/4$	1/4	4	16π	Quatre feuilles de 4π
$23/8$	1/8	8	32π	Huit feuilles de 4π

L'exposant n détermine le nombre de feuilles superposées. Dans cette représentation, $n = 2$ est le cas « exactement une feuille ».

Les termes de l'escalier 2π , 4π , 8π coïncident avec les constantes que le corpus a traitées comme modules (Article 13).

5.2 Pourquoi $16\pi^2$ n'est pas sur cet escalier

L'Article 13 range aussi $16\pi^2$ parmi les modules, mais **il se trouve hors de cette famille**. Exprimé en feuilles,

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

de sorte que **le nombre de feuilles lui-même contient π** et n'est pas un nombre entier de feuilles. Autrement dit, **$16\pi^2$ n'est pas une grandeur atteignable en empilant 4π** .

La distinction entre 16π et $16\pi^2$:

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — **empilement** (quatre feuilles). C'est un terme de cet escalier.
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — **produit** (un produit direct d'angles solides). Il n'est pas sur cet escalier.

Les deux diffèrent non seulement numériquement mais par leur **règle de génération**. $16\pi^2$ provient du produit direct $(4\pi)^2$, ou de la normalisation d'un indice topologique (Articles 29 et 32), etc. — une autre lignée. Ne pas compter dans la même famille des grandeurs d'origine différente est la discipline de l'Article 48.

5.3 Une question ouverte : l'origine du facteur 2

$S = 2(8\pi)$ est lu dans ce corpus comme « deux feuilles, recto et verso ». En revanche, le facteur 2 du 8π de l'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ a une **origine concrète dans la limite newtonienne**, $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ (qui provient de la linéarisation et du renversement de trace nécessaires pour retrouver $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$).

Ces deux « 2 » partagent-ils une origine ? Cet article ne le tranche pas. Si l'on trouve un chemin qui les relie, cela devient une affirmation ; sinon, cela reste une coïncidence numérique. **Nous la laissons comme question ouverte.**

6. Conclusion

Cet article a montré ce qui suit.

1. Le taux de croissance de la masse de la couche sphérique $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ n'est constant sur $(0, \infty)$ que pour $n = 2$ (Théorème 1).

2. L'exposant **2** apparaît en quatre endroits : la conservation du flux de Gauss, la solution fondamentale de l'équation de Laplace, la limite de bande passante de la densité d'information et le théorème de Bertrand. Les trois premiers proviennent de la même aire de la sphère que le Théorème 1 ; Bertrand arrive à l'exposant de force **2** par une sélection différente, la condition que les orbites se referment.
3. Pour $n = 2$, la masse dans la boule unité est $m = 4\pi$, c'est-à-dire qu'elle **coïncide avec l'angle solide total**. En général $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, et n choisit le point d'arrivée sur l'escalier de modules.

Une seule condition — que la croissance par couche ne dépende pas du rayon — fixe l'exposant à **2**. En étendant la même intégrale en n , on voit apparaître un escalier qui compte combien de feuilles de 4π sont empilées.

Registre des révisions

Deuxième édition (septembre 2026) : la forme a été alignée sur le modèle actuel (une note de portée placée juste après le résumé, et des DOI ajoutés aux références du corpus). L'élément consacré à Bertrand dans la Section 3 a été réécrit — la première édition décrivait le théorème de Bertrand comme « découlant du même fait que l'aire de la sphère croît comme r^2 » et comme « la nécessité dynamique pour qu'un système céleste persiste de manière stable », alors que ce théorème est un théorème de mécanique qui sélectionne les forces dont les orbites se referment. Le titre de Bertrand (1873) et l'éditeur de Carr (1886) dans les références ont été corrigés. Les noms des variables angulaires dans la démonstration de la Section 4 ont été alignés sur la définition de la Section 1.

Références

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Article 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [Article 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [Article 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Article 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [Article 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Sous licence Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)