

Il teorema di unicità di $n = 2$ per distribuzioni di densità a simmetria sferica

— Conferma da quattro direzioni (geometria, meccanica, teoria del potenziale, teoria dell'informazione) e la rappresentazione $m = 4\pi$ — [Articolo 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026 (Seconda edizione)

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

Per una distribuzione di densità a legge di potenza a simmetria sferica $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, dimostriamo che la massa aggiunta per guscio sferico, $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$, è indipendente dal raggio r se e solo se $n = 2$ (Teorema 1). La dimostrazione non richiede altro che confrontare i valori al raggio **1** e al raggio **2**.

Mettiamo poi l'uno accanto all'altro quattro luoghi in cui compare lo stesso esponente **2**. Nella conservazione del flusso di Gauss e nella soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace, l' r^2 dell'area della sfera $4\pi r^2$ fa decrescere il flusso per unità di area e l'intensità del campo come $1/r^2$ — lo stesso r^2 del Teorema 1. Nella visione dell'OS dell'Universo, il numero di pixel di uno schermo cresce come $4\pi r^2$, sicché la densità di dati per pixel decresce come $1/r^2$. Il teorema di Bertrand (1873) riduce a due le forze centrali per cui ogni orbita legata si chiude: la forza dell'inverso del quadrato e la forza elastica. È un teorema della meccanica che seleziona le forze secondo **se le orbite si chiudono**, e qui una selezione diversa dall'espansione dell'area incontra le altre nell'esponente di forza **2**.

Inoltre, per $n = 2$ la massa dentro la palla unitaria è $m = 4\pi$, l'angolo solido totale, perché r^2 e $1/r^2$ si compensano.

Estendendo lo stesso integrale a un n generico si ottiene $m(n) = 4\pi/(3-n)$; leggendo $S = 1/(3-n)$ in $m = 4\pi \cdot S$ come «il numero di fogli di 4π impilati», emerge una scala di moduli che attraversa **2π , 4π , 8π , 16π** .

Portata (scope note): Il nucleo di questo articolo è il Teorema 1, e il calcolo è elementare. Una densità $\rho \propto r^{-2}$, la cui massa racchiusa cresce come $m(r) \propto r$, è nota in astrofisica come sfera isoterma singolare — questo articolo la enuncia come **l'unico esponente per cui la crescita per guscio non dipende dal raggio** e la colloca al punto di partenza del corpus. La legge di Gauss, la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace e il teorema di Bertrand sono tutti risultati standard, e le quattro visioni della Sezione 3 non sono quattro dimostrazioni indipendenti. Gauss e Laplace vengono dalla stessa area della sfera del Teorema 1, mentre il teorema di Bertrand seleziona le forze in base alla condizione che le orbite si chiudano e non discende dall'espansione dell'area (la sua seconda soluzione, la forza elastica, lo mostra). La visione dell'OS dell'Universo è una lettura per metafora. Per trattare $\rho = r^{-2}$ come densità si deve scrivere $\rho = k/r^2$ con una costante k di dimensione $[M/L]$; $m = 4\pi$ è il suo valore sotto la scelta di unità $k = 1$ e raggio 1 . Non si rivendica alcuna nuova legge fisica. **Ciò che questo articolo aggiunge** è che una sola condizione — la crescita uniforme per guscio — fissa l'esponente a **2**; che, mettendo l'una accanto all'altra le diverse grandezze in cui questo **2** compare (densità di massa, flusso, intensità del campo e forza), separa quelle che vengono dallo stesso r^2 da quella che viene da una selezione diversa; e che estendere lo stesso integrale a un n generico produce la scala $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ e il numero di fogli $S = 1/(3 - n)$.

1. Impostazione del problema

Definizione 1 (Impostazione geometrica)

Consideriamo una distribuzione di densità a legge di potenza a simmetria sferica $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, dove $r = |\mathbf{x}| > 0$ e $n \in \mathbb{R}$. In coordinate sferiche (r, θ, φ) , l'elemento di volume è $dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$.

Definizione 2 (Tasso di crescita della massa del guscio sferico)

Definendo la massa totale racchiusa in una sfera di raggio r come $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, il tasso di crescita della massa per guscio al raggio r è definito come

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

Definizione 3 (Condizione di uniformità / invarianza di scala)

Lo stato in cui il tasso di crescita della massa del guscio assume un valore costante $C > 0$ a ogni raggio $r \in (0, \infty)$ si chiama «condizione di uniformità».

2. Teorema principale: unicità di $n = 2$ (dimostrazione analitica)

Teorema 1 (Unicità di $n = 2$)

Sia $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$). Il tasso di crescita della massa del guscio sferico $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ è una funzione costante su $(0, \infty)$ se e solo se $n = 2$.

Lemma 1 (Costanza delle funzioni potenza)

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f(r) = r^\alpha$ è costante su $(0, \infty)$ se e solo se $\alpha = 0$.

Dimostrazione del Lemma 1

Sufficienza ($\alpha = 0 \implies f$ è costante): se $\alpha = 0$, allora $f(r) = r^0 = 1$ identicamente.

Necessità (f costante $\implies \alpha = 0$): dimostriamo la contronominale. Supponiamo $\alpha \neq 0$. Confrontando i valori in $r = 1$ e $r = 2$: $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$. L'esponentiale $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ poiché $\ln 2 > 0$.

Quindi $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, sicché $f(r)$ non è costante.

Dimostrazione del Teorema 1

Il tasso di crescita della massa del guscio è $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$. Poiché $4\pi > 0$, la costanza di dm/dr equivale alla costanza di r^{2-n} su $(0, \infty)$. Per il Lemma 1, $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$. Per $n = 2$, $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (costante).

3. Quattro luoghi in cui compare l'esponente 2

3.1 La via di Gauss — geometria e conservazione del flusso

Nello spazio tridimensionale l'area di una sfera di raggio r è $S(r) = 4\pi r^2$. Quando un flusso conservato Φ_{total} esce dal centro in tutte le direzioni, il flusso per unità di area $j(r)$ decresce in proporzione inversa alla crescita dell'area:

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

L' r^2 che agisce qui è lo stesso r^2 dell'area della sfera che compare in $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ del Teorema 1.

3.2 La via di Laplace / Green — teoria del potenziale e soluzione fondamentale

Nello spazio libero tridimensionale, la soluzione fondamentale (funzione di Green) dell'equazione di Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ per una sorgente puntiforme è $\Phi(r) \propto 1/r$. Prendendone il gradiente, l'intensità del campo è

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

L' $1/r$ della soluzione fondamentale è a sua volta fissato dal flusso della sorgente puntiforme che attraversa la sfera di raggio r ; la sua radice è quindi la stessa della via di Gauss.

3.3 La via dell'OS dell'Universo — densità di informazione e banda di rendering

Considerando l'universo come un sistema di elaborazione dell'informazione (OS), il numero di pixel di uno schermo di visualizzazione (UI) di raggio r cresce in proporzione all'area $4\pi r^2$. Per mantenere costanti il carico totale di rendering e la banda di comunicazione (un processo di sfoltimento), la densità di dati $\rho(r)$ per pixel deve essere inversamente proporzionale all'estensione dello schermo:

$$\text{Carico totale} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Ciò riformula la condizione del Teorema 1, « $4\pi r^2 \rho$ è costante», nel linguaggio del rendering.

3.4 La via di Bertrand — le forze le cui orbite si chiudono

Per il teorema di Bertrand (1873), tra i campi di forze centrali, ogni orbita legata si chiude solo quando il potenziale $V(r) \propto r^\beta$ ha $\beta = -1$ (la forza dell'inverso del quadrato $F \propto 1/r^2$) oppure $\beta = 2$ (la forza elastica $F \propto r$, l'oscillatore armonico). Le orbite si chiudono sotto la forza dell'inverso del quadrato perché, oltre al momento angolare, si conserva un'ulteriore grandezza — il vettore di Laplace–Runge–Lenz —, una simmetria nascosta propria di $n = 2$ (articolo 79).

Il criterio con cui questo teorema seleziona è **se le orbite si chiudono**. Non discende dall'espansione dell'area della sfera — la sua seconda soluzione, la forza elastica, è selezionata senza alcun riferimento alla conservazione del flusso. Che la forza

attorno a una massa puntiforme in tre dimensioni sia dell'inverso del quadrato (via di Gauss) e che le orbite si chiudano sotto la forza dell'inverso del quadrato (Bertrand) sono **due selezioni separate che si incontrano nell'esponente di forza 2**.

Il **2** qui è l'esponente della forza, non l'esponente della densità di massa del Teorema 1. Per una distribuzione la cui densità di massa è essa stessa $\rho = k/r^2$, la massa racchiusa è proporzionale al raggio, sicché la forza va come $1/r$:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ è la massa della particella di prova). Questa forza non è nessuna delle due soluzioni di Bertrand.

3.5 Come si relazionano le quattro visioni

Delle quattro, le tre vie di Gauss, di Laplace e dell'OS dell'Universo ottengono $1/r^2$ dalla **stessa area della sfera $4\pi r^2$** del Teorema 1. Solo Bertrand seleziona con un criterio diverso — la chiusura delle orbite — e le raggiunge nell'esponente di forza **2**. L'esponente **2** compare in quattro luoghi, ma ciò che conta è ogni volta diverso: densità di massa, flusso, intensità del campo e forza.

4. Dimostrazione per integrale multiplo della massa limite $m = 4\pi$

Teorema 2 (Compensazione fino alla massa limite $m = 4\pi$)

Per $n = 2$, cioè $\rho(r) = 1/r^2$, la massa totale m sulla palla unitaria $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ vede compensata la sua dipendenza dalla distanza ed è uguale all'angolo solido totale 4π .

Dimostrazione.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. $m(n)$ come scala di moduli

Eseguendo l'integrale precedente per un n generico, la massa totale dentro la palla unitaria è

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Risolvendo per l' n a cui m assume un valore di modulo $2^k\pi$ si ottiene la forma chiusa

$$n = 3 - 2^{2-k}.$$

Modulo	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	5/2	25.1327
16π	11/4	50.2655

Cioè, un'unica famiglia $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ genera la scala di moduli, e l'esponente n sceglie su quale modulo atterra.

5.1 Rappresentazione per numero di fogli: $3 - n$ è il reciproco del numero di fogli

Scrivendo quanto sopra come $m = 4\pi \cdot S$ si ottiene

$$S = \frac{1}{3-n} \quad \text{cioè} \quad 3-n = \frac{1}{S}.$$

Leggendo S come «quanti fogli di 4π sono impilati», la scala assume la forma seguente.

n	$3-n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Lettura
0	3	1/3	$4\pi/3$	Volume della palla unitaria
1	2	1/2	2π	Metà di 4π
2	1	1	4π	Un foglio di 4π
5/2	1/2	2	8π	Due fogli di 4π (fronte e retro)
11/4	1/4	4	16π	Quattro fogli di 4π
23/8	1/8	8	32π	Otto fogli di 4π

L'esponente n determina il numero di fogli sovrapposti. In questa rappresentazione, $n = 2$ è il caso di «esattamente un foglio».

I termini della scala 2π , 4π , 8π coincidono con le costanti che il corpus ha trattato come moduli (articolo 13).

5.2 Perché $16\pi^2$ non sta su questa scala

L'articolo 13 elenca anche $16\pi^2$ come modulo, ma **esso sta fuori da questa famiglia**. Espresso in fogli,

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

sicché **il numero di fogli stesso contiene π** e non è un numero intero di fogli. In altre parole, **$16\pi^2$ non è una grandezza raggiungibile impilando 4π** .

La distinzione tra 16π e $16\pi^2$:

- **$16\pi = 4\pi \times 4$ — impilamento** (quattro fogli). È un termine di questa scala.
- **$16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — prodotto** (un prodotto diretto di angoli solidi). Non sta su questa scala.

I due differiscono non solo numericamente ma nella **regola di generazione**. $16\pi^2$ proviene dal prodotto diretto $(4\pi)^2$, o dalla normalizzazione di un indice topologico (articoli 29 e 32), ecc. — un'altra discendenza. Non contare nella stessa famiglia grandezze di origine diversa è la disciplina dell'articolo 48.

5.3 Una questione aperta: l'origine del fattore 2

$S = 2(8\pi)$ è letto in questo corpus come «due fogli, fronte e retro». D'altra parte, il fattore 2 nell' 8π dell'equazione di Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ ha un'**origine concreta nel limite newtoniano**, $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ (che nasce dalla linearizzazione e dall'inversione di traccia necessarie per accordarsi con $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$).

Se questi due «2» condividano un'origine non è deciso in questo articolo. Se si trova un cammino che li collega, diventa un'affermazione; altrimenti resta una coincidenza numerica. **La lasciamo come questione aperta.**

6. Conclusione

Questo articolo ha mostrato quanto segue.

1. Il tasso di crescita della massa del guscio sferico $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ è costante su $(0, \infty)$ solo per $n = 2$ (Teorema 1).
2. L'esponente **2** compare in quattro luoghi: la conservazione del flusso di Gauss, la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace, il limite di banda della densità di informazione e il teorema di Bertrand. I primi tre vengono dalla stessa area della sfera del Teorema 1; Bertrand arriva all'esponente di forza **2** per una selezione diversa, la condizione che le orbite si chiudano.
3. Per $n = 2$, la massa dentro la palla unitaria è $m = 4\pi$, cioè **coincide con l'angolo solido totale**. In generale $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, e n sceglie il punto di atterraggio sulla scala di moduli.

Una sola condizione — che la crescita per guscio non dipenda dal raggio — fissa l'esponente a **2**. Estendendo lo stesso integrale in n si scorge una scala che conta quanti fogli di 4π sono impilati.

Registro delle revisioni

Seconda edizione (settembre 2026): la forma è stata allineata al modello attuale (una nota di portata posta subito dopo il sommario, e DOI aggiunti ai riferimenti del corpus). La voce su Bertrand della Sezione 3 è stata riscritta — la prima edizione descriveva il teorema di Bertrand come «conseguenza dello stesso fatto che l'area della sfera cresce come r^2 » e come «la necessità dinamica perché un sistema celeste persista stabilmente», mentre il teorema è un teorema della meccanica che seleziona le forze le cui orbite si chiudono. Il titolo di Bertrand (1873) e l'editore di Carr (1886) nei riferimenti sono stati corretti. I nomi delle variabili angolari nella dimostrazione della Sezione 4 sono stati allineati alla definizione della Sezione 1.

Bibliografia

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Articolo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [Articolo 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [Articolo 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Articolo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [Articolo 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Concesso in licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale (CC BY 4.0)