

球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理

— 幾何学・力学・ポテンシャル論・情報論からの4方向の確認と、 $m = 4\pi$ という表示 — [論文01]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— From thinking to syncing. —

要旨

3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の球対称べき型密度分布 $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) について、球殻1枚ぶんの質量の増え方 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ が半径 r によらず一定になるのは、 $n = 2$ のときに限られることを証明する (定理1)。証明は、半径1と半径2での値をくらべるだけで足りる。

次に、同じ指数2が現れる四つの場所を並べる。ガウスの流束保存とラプラス方程式の基本解では、球の表面積 $4\pi r^2$ の r^2 が、単位面積あたりの流束と場の強さを $1/r^2$ にする——定理1と同じ r^2 である。宇宙OSの見方では、画面の画素数が $4\pi r^2$ で増えるので、画素あたりのデータ密度が $1/r^2$ になる。ベルトランの定理 (1873) は、有界な軌道がすべて閉じる中心力を、逆二乗の力とばねの力の二つに絞る。こちらは軌道が閉じるかどうかで力を選ぶ力学の定理であり、面積の広がりとは別の選び方が、力の指数2で出会っている。

さらに $n = 2$ のとき、単位球の中の質量は r^2 と $1/r^2$ が打ち消し合って $m = 4\pi$ 、すなわち全立体角に一致する。同じ積分を一般の n に広げると $m(n) = 4\pi/(3-n)$ となり、 $m = 4\pi \cdot S$ の $S = 1/(3-n)$ を「 4π の重なり枚数」と読むと、 $2\pi, 4\pi, 8\pi, 16\pi$ と進むモジュール階段が現れる。

本稿の射程 (scope note) : 本稿の芯は定理1であり、計算は初等的である。 $\rho \propto r^{-2}$ は、囲む質量が $m(r) \propto r$ となる分布として、天体物理では特異等温球の名で知られている——本稿はそれを殻ごとの増え方が半径によらない唯一の指数として述べ、体系の出発点に置く。ガウスの法則、ラプラス方程式の基本解、ベルトランの定理はいずれも標準的な結果であり、第3節の四つの見方は独立な四つの証明ではない。ガウスとラプラスは定理1と同じ球の表面積から出るが、ベルトランの定理は軌道が閉じる条件で力を選ぶ定理で、面積の広がりからは出ない（ばねの力という二つ目の解が、そのことを示している）。宇宙OSの見方は比喻による読みである。 $\rho = r^{-2}$ を密度として扱うには $[M/L]$ の次元をもつ定数 k を添えて $\rho = k/r^2$ と書くべきで、 $m = 4\pi$ は $k = 1 \cdot$ 半径 1 という単位の選び方のもとでの値である。新しい物理法則は主張しない。加えたのは、殻ごとの増え方の一様さという一つの条件で指数を 2 に定めたこと、その 2 が質量密度・流束・場の強さ・力という別々の量に現れることを並べ、どれが同じ r^2 から出て、どれが別の選び方から出るかを分けたこと、そして同じ積分を一般の n に広げて $m(n) = 4\pi/(3-n)$ の階段と重なり枚数 $S = 1/(3-n)$ を得たことである。

1. 問題の定式化

定義 1 (幾何学的設定)

3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における球対称べき型密度分布 $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ ($r = |\mathbf{x}| > 0, n \in \mathbb{R}$) を考える。球座標系 (r, θ, φ) における体積要素は $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ である。

定義 2 (球殻質量増加率)

半径 r の球内部に含まれる総質量を $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$ と定義するとき、半径 r における球殻1枚あたりの質量増加率（球殻質量微分）を

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}$$

と定義する。

定義 3 (一様性条件 / スケール不変性)

球殻質量増加率が半径 $r \in (0, \infty)$ のすべての点で一定の値（定数 $C > 0$ ）をとる状態を「一様性条件」と呼ぶ。

2. 主定理： $n = 2$ の唯一性定理（解析的王道証明）

定理 1（ $n = 2$ の唯一性）

$\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) とする。球殻質量増加率 $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ が $(0, \infty)$ 上で定数関数となるための必要十分条件は $n = 2$ である。

補題 1（べき関数の定数性に関する補題）

$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、関数 $f(r) = r^\alpha$ が $(0, \infty)$ 上で定数であるための必要十分条件は $\alpha = 0$ である。

補題1の証明

十分性 ($\alpha = 0 \implies f$ は定数) : $\alpha = 0$ のとき、 $f(r) = r^0 = 1$ （恒等的に1）。

必要性 (f が定数 $\implies \alpha = 0$) : 対偶を示す。 $\alpha \neq 0$ と仮定する。 $r = 1$ と $r = 2$ における値を比較すると、 $f(1) = 1^\alpha = 1, f(2) = 2^\alpha$ である。指数関数 $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ は $\ln 2 > 0$ より $\mathbb{R}$ 上で狭義単調増加である。したがって $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$ 。よって $f(r)$ は定数ではない。

定理1の証明

球殻質量増加率は $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ である。 $4\pi > 0$ であるため、 dm/dr が定数であることは r^{2-n} が $(0, \infty)$ 上で定数であることと同値である。補題1より、 $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$ 。 $n = 2$ のとき、 $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ （定数）となる。

3. 指数 2 が現れる四つの場所

3.1 ガウスのルート — 幾何学と流束保存

3次元空間では、半径 r の球の表面積は $S(r) = 4\pi r^2$ である。中心から全方位へ保存される流束 Φ_{total} が出ていくとき、単位面積あたりの流束 $j(r)$ は表面積の増え方に反比例する：

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

ここで効いている r^2 は、定理1の $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ の r^2 と同じ、球の表面積の r^2 である。

3.2 ラプラス／グリーンのルート — ポテンシャル論と基本解

3次元の自由空間で、点源に対するラプラス方程式 $\nabla^2\Phi = 0$ の基本解（グリーン関数）は $\Phi(\mathbf{r}) \propto 1/r$ である。その勾配をとると、場の強さは

$$-\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} \propto \frac{1}{r^2}\hat{r}$$

となる。基本解の $1/r$ そのものが、点源から出た流束が半径 r の球面を通り抜けるという事情から決まっており、根はガウスのルートと同じである。

3.3 宇宙OSのルート — 情報密度と描画の帯域

宇宙を情報処理システム（OS）と見立てると、半径 r の表示画面（UI）の画素数は表面積 $4\pi r^2$ に比例して増える。全体の描画負荷と通信帯域を一定に保つ（カリング処理）には、画素あたりのデータ密度 $\rho(r)$ が画面の広がり反比例していなければならない：

$$\text{総負荷} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

これは定理1の条件「 $4\pi r^2\rho$ が一定」を、描画の言葉で言い直したものである。

3.4 ベルトランのルート — 軌道が閉じる力

ベルトランの定理（1873）によれば、中心力場のうち、有界な軌道がすべて閉じるのは、ポテンシャル $V(r) \propto r^\beta$ が $\beta = -1$ （逆二乗の力 $F \propto 1/r^2$ ）のときと、 $\beta = 2$ （ばねの力 $F \propto r$ 、調和振動子）のときに限られる。逆二乗の力で軌道が閉じる理由は、角運動量のほかにもう一つ保存される量——ラプラス＝ルンゲ＝レンツ・ベクトル——があることで、それは $n = 2$ に固有の隠れた対称性である（論文79）。

この定理が選ぶ基準は、軌道が閉じるかどうかである。球の表面積の広がりからは出ない——二つ目の解であるばねの力は、流束保存とは関係なく選ばれている。3次元で点質量のまわりの力が逆二乗になること（ガウスのルート）と、逆二乗の力で軌道が閉じること（ベルトラン）は、別々の二つの選び方が、力の指数 2 で出会ったものである。

ここでの 2 は力の指数であって、定理1の質量密度の指数ではない。質量密度そのものが $\rho = k/r^2$ の分布では、囲む質量が半径に比例するので、力は $1/r$ になる：

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

（ μ は試験粒子の質量）。この力は、ベルトランの二つの解のどちらにも入らない。

3.5 四つの見方の関係

四つのうち、ガウス・ラプラス・宇宙OSの三つは、定理1と同じ球の表面積 $4\pi r^2$ から $1/r^2$ を得ている。ベルトランだけが別の基準——軌道が閉じること——で選び、力の指数 **2** でそこへ合流する。指数 **2** は四か所に現れるが、数えている量は、質量密度・流束・場の強さ・力と、それぞれ違う。

4. 極限質量 $m = 4\pi$ の多重積分証明

定理 2（極限質量 $m = 4\pi$ のキャンセレーション）

$n = 2$ すなわち $\rho(r) = 1/r^2$ のとき、単位球 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ における総質量 m は、距離への依存が打ち消し合い、全立体角 4π に一致する。

証明

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

5. モジュール階段としての $m(n)$

上記の積分を一般の n について実行すると、単位球内の総質量は

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3)$$

となる。ここで m がモジュール値 $2^k\pi$ をとる n を求めると、閉じた形

$$n = 3 - 2^{2-k}$$

が得られる。

モジュール	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	$5/2$	25.1327
16π	$11/4$	50.2655

すなわち単一の族 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ がモジュール階段を生成しており、指数 n がどのモジュールに着地するかを選ぶ。

5.1 枚数表示： $3 - n$ は重なり枚数の逆数である

上式を $m = 4\pi \cdot S$ と書くと

$$S = \frac{1}{3-n}$$

すなわち

$$3-n = \frac{1}{S}$$

となる。 S を「 4π が何枚重なっているか」と読むと、階段は次の形をとる。

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	読み
0	3	$1/3$	$4\pi/3$	単位球の体積
1	2	$1/2$	2π	4π の半分
2	1	1	4π	4π 1枚
$5/2$	$1/2$	2	8π	4π 2枚（表と裏）
$11/4$	$1/4$	4	16π	4π 4枚
$23/8$	$1/8$	8	32π	4π 8枚

指数 n が重なり枚数を決めている。この表示において $n = 2$ は「ちょうど1枚」の場合にあたる。

階段の項 $2\pi, 4\pi, 8\pi$ は、体系がモジュールとして扱ってきた定数（論文13）と一致する。

5.2 $16\pi^2$ がこの階段に乗らないこと

論文13はモジュールとして $16\pi^2$ も挙げているが、これは本族の外にある。枚数で表すと

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots$$

となり、枚数自体が π を含むため整数枚にならない。すなわち $16\pi^2$ は 4π を積み重ねて到達できる量ではない。

16π と $16\pi^2$ の区別：

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — 積層（4枚重ね）。本階段の項である。
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — 積（立体角どうしの直積）。本階段には乗らない。

両者は数値が異なるだけでなく生成規則が異なる。 $16\pi^2$ は $(4\pi)^2$ の直積、あるいは位相的指数の規格化（論文29・32）など別系統に由来する。起源の違う量を同じ族に数えない、というのが論文48の規律である。

5.3 開いた問い：因子2の起源

$S = 2(8\pi)$ は本体系において「表と裏の2枚」と読まれる。他方、アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ に現れる 8π の因子2には、ニュートン極限における $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ という具体的な出所がある（ $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ に整合させるための線形化・トレース反転に由来する）。

この二つの「2」が同じ起源をもつかは、本稿では決めない。つなぐ道が見つかれば主張になり、見つからなければ数の一致にとどまる。開いた問いとして残す。

6. 結論

本稿は次を示した。

1. 球殻質量増加率 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ が $(0, \infty)$ 上で定数となるのは $n = 2$ に限られる（定理1）。
2. 指数 2 は、ガウスの流束保存、ラプラス方程式の基本解、情報密度の帯域制限、ベルトランの定理の四か所に現れる。前の三つは定理1と同じ球の表面積から来ており、ベルトランは軌道が閉じる条件という別の選び方で、力の指数 2 に行き着く。
3. $n = 2$ のとき単位球内の質量は $m = 4\pi$ 、すなわち全立体角と一致する。一般には $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ であり、 n はモジュール階段上の着地点を選ぶ。

殻ごとの増え方が半径によらない、という一つの条件が指数を 2 に決める。同じ積分を n について広げると、 4π が何枚重なるかという階段が見えてくる。

改訂記録

第2版（2026年9月）：書式を現行の型に揃えた（要旨の直後に射程注記を置き、参考文献に既刊の DOI を付けた）。第3節のベルトランの項を書き直した——初版はベルトランの定理を「球面積が r^2 で増えるという同じ事実から従う」「天体系が安定して存続するための力学的必然性」と書いていたが、この定理は軌道が閉じる力を選ぶ力学の定理である。参考文献の Bertrand (1873) の題名と Carr (1886) の出版社を正した。第4節の証明の角度の変数名を、第1節の定義に揃えた。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. 山岸勇輝 (2026). 宇宙OS記述言語としての物理法則 [論文13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. 山岸勇輝 (2026). 山岸・アドラー・バーディーン ノート [論文29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. 山岸勇輝 (2026). 山岸・統合バジェットキャンバス理論 [論文32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. 山岸勇輝 (2026). $n=2$ の隠れた対称性 [論文79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)