

구대칭 밀도 분포에 대한 $n = 2$ 유일성 정리

— 네 방향(기하학, 역학, 퍼텐셜 이론, 정보 이론)으로부터의 확인과 표현 $m = 4\pi$ — [논문 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, 일본

2026년 9월 (제2판)

— From thinking to syncing. —

초록

구대칭 거듭제곱 법칙 밀도 분포 $\rho(r) = r^{-n} (n \in \mathbb{R})$ 이 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에 있을 때, 구각마다 더해지는 질량 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ 이 반지름 r 에 무관할 필요충분조건이 $n = 2$ 임을 증명한다(정리 1). 증명에는 반지름 1과 반지름 2에서의 값을 비교하는 것 이상이 필요하지 않다.

이어서 같은 지수 2가 나타나는 네 곳을 나란히 놓는다. 가우스의 플럭스 보존과 라플라스 방정식의 기본해에서는, r^2 (구면적 $4\pi r^2$ 의 증가)이 단위 면적당 플럭스와 장의 세기를 $1/r^2$ 로 감소시킨다 — 정리 1의 r^2 과 같은 것이다. 우주 OS의 관점에서는 화면의 화소 수가 $4\pi r^2$ 로 늘어나므로, 화소당 데이터 밀도는 $1/r^2$ 로 줄어든다. 베르트랑 정리(1873)는 모든 유계 궤도가 닫히는 중심력을 두 가지로 좁힌다: 역제곱 힘과 용수철 힘이다. 이는 궤도가 닫히는가 로 힘을 고르는 역학의 정리이며, 여기서는 면적의 퍼짐과는 다른 선택이 힘의 지수 2에서 나머지와 만난다.

또한 $n = 2$ 일 때 단위 공 안의 질량은 $m = 4\pi$, 곧 총 입체각이 되는데, r^2 과 $1/r^2$ 이 상쇄되기 때문이다. 같은 적분을 일반적인 n 으로 넓히면 $m(n) = 4\pi/(3-n)$ 을 얻는다. $S = 1/(3-n)$ 을 $m = 4\pi \cdot S$ 에서 “겹쳐 쌓인 4π 의 장수”로 읽으면, $2\pi, 4\pi, 8\pi, 16\pi$ 를 지나는 모듈 계단이 드러난다.

본 논문의 범위(scope note): 본 논문의 핵심은 정리 1이며, 계산은 초등적이다. 밀도 $\rho \propto r^{-2}$ 는 둘러싸인 질량이 $m(r) \propto r$ 로 늘어나며, 천체물리학에서는 특이 등온구로 알려져 있다 — 본 논문은 이를 **구각당 증가가 반지름에 의존하지 않는 유일한 지수**로 서술하고, 체계의 출발점에 둔다. 가우스 법칙, 라플라스 방정식의 기본해, 베르트랑 정리는 모두 표준적인 결과이며, 제3절의 네 관점은 네 개의 독립된 증명이 아니다. 가우스와 라플라스는 정리 1과 같은 구면적에서 나오는 반면, 베르트랑 정리는 궤도가 닫힌다는 조건으로 힘을 고르며 면적의 퍼짐에서 따라 나오지 않는다(그 두 번째 해인 용수철 힘이 이를 보여 준다). 우주 OS의 관점은 은유에 의한 읽기이다. $\rho = r^{-2}$ 를 밀도로 다루려면 $\rho = k/r^2$ 로 써야 하며, 여기서 상수 k 의 차원은 $[M/L]$ 이다. $m = 4\pi$ 는 단위 선택 $k = 1$ 과 반지름 1 아래에서의 값이다. 새로운 물리 법칙은 주장하지 않는다. **본 논문이 더하는 것은**, 하나의 조건 — 구각당 균일한 증가 — 이 지수를 2로 고정한다는 것, 이 2가 나타나는 서로 다른 양들(질량 밀도, 플럭스, 장의 세기, 힘)을 나란히 놓음으로써 같은 r^2 에서 나오는 것들과 다른 선택에서 나오는 하나를 가르다는 것, 그리고 같은 적분을 일반적인 n 으로 넓히면 계단 $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ 과 장수 $S = 1/(3 - n)$ 이 얻어진다는 것이다.

1. 문제의 설정

정의 1 (기하학적 설정)

구대칭 거듭제곱 법칙 밀도 분포 $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ 을 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 생각한다. 여기서 $r = |\mathbf{x}| > 0, n \in \mathbb{R}$ 이다. 구면 좌표 (r, θ, φ) 에서 부피 요소는 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ 이다.

정의 2 (구각 질량 증가율)

반지름 r 인 구 안에 둘러싸인 총질량을 $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$ 로 정의할 때, 반지름 r 에서 구각당 질량 증가율을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

정의 3 (균일성 조건 / 척도 불변성)

구각 질량 증가율이 상수값 $C > 0$ 을 취하고, 그것이 모든 반지름 $r \in (0, \infty)$ 에서 성립하는 상태를 “균일성 조건”이라 부른다.

2. 정리: $n = 2$ 의 유일성(해석적 증명)

정리 1 ($n = 2$ 의 유일성)

$\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$)이라 하자. 구각 질량 증가율 $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ 이 $(0, \infty)$ 에서 상수 함수일 필요충분조건은 $n = 2$ 이다.

보조정리 1 (거듭제곱 함수의 상수성)

$\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여, 함수 $f(r) = r^\alpha$ 가 $(0, \infty)$ 에서 상수일 필요충분조건은 $\alpha = 0$ 이다.

보조정리 1의 증명

충분성($\alpha = 0 \implies f$ 는 상수): $\alpha = 0$ 이면 $f(r) = r^0 = 1$ 이 항등적으로 성립한다.

필요성(f 가 상수 $\implies \alpha = 0$): 대우를 증명한다. $\alpha \neq 0$ 이라 하자. $r = 1$ 과 $r = 2$ 에서의 값을 비교하면

$f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$ 이다. 지수 함수 $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 순증가하는데, $\ln 2 > 0$ 이기 때문이다. 따라서 $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$ 이므로 $f(r)$ 은 상수가 아니다.

정리 1의 증명

구각 질량 증가율은 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ 이다. $4\pi > 0$ 이므로, dm/dr 이 상수인 것은 r^{2-n} 이 $(0, \infty)$ 에서 상수인 것과 동치이다. 보조정리 1에 의해 $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$ 이다. $n = 2$ 일 때 $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (상수)이다.

3. 지수 2가 나타나는 네 곳

3.1 가우스의 길 — 기하학과 플럭스 보존

3차원 공간에서 반지름 r 인 구의 겉넓이는 $S(r) = 4\pi r^2$ 이다. 보존되는 플럭스 Φ_{total} 가 중심에서 모든 방향으로 나갈 때, 단위 면적당 플럭스 $j(r)$ 는 면적의 증가에 반비례하여 줄어든다:

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

여기서 작용하는 r^2 은 구면적의 r^2 이며, 정리 1의 $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ 에 있는 것과 같다.

3.2 라플라스 / 그린의 길 — 퍼텐셜 이론과 기본해

3차원 자유 공간에서 점원천에 대한 라플라스 방정식 $\nabla^2\Phi = 0$ 의 기본해(그린 함수)는 $\Phi(r) \propto 1/r$ 이다. 그 기울기를 취하면 장의 세기는 다음과 같다.

$$-\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} \propto \frac{1}{r^2}\hat{r}$$

기본해의 $1/r$ 자체가 점원천의 플럭스가 반지름 r 인 구를 지난다는 것으로 정해지므로, 그 뿌리는 가우스의 길과 같다.

3.3 우주 OS의 길 — 정보 밀도와 렌더링 대역폭

우주를 정보 처리 시스템(OS)으로 보면, 반지름 r 인 표시 화면(UI)의 화소 수는 면적 $4\pi r^2$ 에 비례하여 늘어난다. 총 렌더링 부하와 통신 대역폭을 일정하게 유지하려면(숙아내기 과정), 화소당 데이터 밀도 $\rho(r)$ 는 화면의 퍼짐에 반 비례해야 한다:

$$\text{총 부하} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

이것은 정리 1의 조건 “ $4\pi r^2\rho$ 가 상수”를 렌더링의 언어로 다시 말한 것이다.

3.4 베르트랑의 길 — 궤도가 닫히는 힘

베르트랑 정리(1873)에 따르면, 중심력장 가운데 모든 유계 궤도가 닫히는 것은 퍼텐셜 $V(r) \propto r^\beta$ 가 $\beta = -1$ (역제곱 힘 $F \propto 1/r^2$) 또는 $\beta = 2$ (용수철 힘 $F \propto r$, 조화 진동자)일 때뿐이다. 역제곱 힘에서 궤도가 닫히는 이유는 각운동량 외에 또 하나의 양 — 라플라스-룽게-렌츠 벡터 — 가 보존되기 때문이며, 이는 $n = 2$ 에 고유한 숨은 대칭이다(논문 79).

이 정리가 고르는 기준은 **궤도가 닫히는**가이다. 이는 구면적의 퍼짐에서 따라 나오지 않는다 — 그 두 번째 해인 용수철 힘은 플럭스 보존과 전혀 관계없이 선택된다. 3차원에서 점질량 둘레의 힘이 역제곱이라는 것(가우스의 길)과, 역제곱 힘에서 궤도가 닫힌다는 것(베르트랑)은 **힘의 지수 2에서 만나는 서로 별개의 두 선택**이다.

여기서의 **2**는 힘의 지수이지, 정리 1의 질량 밀도의 지수가 아니다. 질량 밀도 자체가 $\rho = k/r^2$ 인 분포에서는 둘러싸인 질량이 반지름에 비례하므로, 힘은 $1/r$ 로 변한다:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ 는 시험 입자의 질량). 이 힘은 베르트랑의 두 해 어느 쪽도 아니다.

3.5 네 관점의 관계

넷 가운데 가우스, 라플라스, 우주 OS의 세 길이 얻는 $1/r^2$ 은 정리 1과 **같은 구면적 $4\pi r^2$ 에서** 나온다. 베르트랑만이 다른 기준 — 궤도의 닫힘 — 으로 골라, 힘의 지수 **2**에서 이들과 합류한다. 지수 **2**는 네 곳에 나타나지만, 그것이 세

는 대상은 매번 다르다: 질량 밀도, 플럭스, 장의 세기, 힘.

4. 극한 질량 $m = 4\pi$ 의 다중 적분 증명

정리 2 (극한 질량 $m = 4\pi$ 로의 상쇄)

$n = 2$, 곧 $\rho(r) = 1/r^2$ 일 때, 총질량 m 은 단위 공 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ 위에서 거리 의존성이 상쇄되어 총 입체각 4π 와 같아진다.

증명.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2}\right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. 모듈 계단으로서의 $m(n)$

위의 적분을 일반적인 n 에 대해 수행하면, 단위 공 안의 총질량은 다음과 같다.

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

그리고 n 을, m 이 모듈 값 $2^k\pi$ 를 취하는 곳으로 풀면 다음의 닫힌 꼴을 얻는다.

$n = 3 - 2^{2-k}.$

모듈	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	5/2	25.1327
16π	11/4	50.2655

즉, 하나의 족 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ 이 모듈 계단을 만들고, 지수 n 이 어느 모듈에 착지할지를 고른다.

5.1 장수 표현: $3 - n$ 은 장수의 역수이다

위 식을 $m = 4\pi \cdot S$ 로 쓰면 다음을 얻는다.

$S = \frac{1}{3 - n}$

즉

$3 - n = \frac{1}{S}$

S 를 “ 4π 가 몇 장 겹쳐 쌓였는가”로 읽으면, 계단은 다음과 같은 모습이 된다.

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3 - n}$	m	읽기
0	3	$1/3$	$4\pi/3$	단위 공의 부피
1	2	$1/2$	2π	4π 의 절반
2	1	1	4π	4π 한 장
$5/2$	$1/2$	2	8π	4π 두 장(앞면과 뒷면)
$11/4$	$1/4$	4	16π	4π 네 장
$23/8$	$1/8$	8	32π	4π 여덟 장

지수 n 이 겹치는 장수를 정한다. 이 표현에서 $n = 2$ 는 “정확히 한 장”인 경우이다.

계단의 항 $2\pi, 4\pi, 8\pi$ 는 체계가 모듈로 다루어 온 상수들과 일치한다(논문 13).

5.2 왜 $16\pi^2$ 는 이 계단 위에 없는가

논문 13은 $16\pi^2$ 도 모듈로 곱지만, 이것은 이 족의 바깥에 있다. 장수로 나타내면

$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$

이므로 장수 자체가 π 를 포함하며, 정수 장수가 아니다. 다시 말해 $16\pi^2$ 는 4π 를 쌓아서 도달할 수 있는 양이 아니다.

16π 와 $16\pi^2$ 의 구별:

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — 쌓기(네 장). 이 계단의 한 항이다.
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — 곱(입체각의 직접곱). 이 계단 위에 없다.

둘은 수치만이 아니라 생성 규칙에서 다르다. $16\pi^2$ 는 직접곱 $(4\pi)^2$ 에서, 또는 위상 지표의 규격화(논문 29와 32) 등에서 나온다 — 다른 계보이다. 기원이 다른 양을 같은 족으로 세지 않는 것이 논문 48의 규율이다.

5.3 열린 질문: 인자 2의 기원

$S = 2(8\pi)$ 는 이 체계에서 “앞면과 뒷면의 두 장”으로 읽힌다. 한편 8π 의 인자 2 — 곧 아인슈타인 방정식 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ 에 있는 것 — 는 뉴턴 극한 $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ 에 구체적인 기원을 가진다($\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ 와 맞추기 위해 필요한 선형화와 대각합 반전에서 생긴다).

이 두 “2”가 기원을 공유하는지는 본 논문에서 판정하지 않는다. 둘을 잇는 경로가 발견되면 그것은 주장이 되고, 발견되지 않으면 수치상의 우연으로 남는다. 열린 질문으로 남겨 둔다.

6. 결론

본 논문은 다음을 보였다.

- 구각 질량 증가율 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ 이 $(0, \infty)$ 에서 상수인 것은 $n = 2$ 일 때뿐이다(정리 1).
- 지수 2는 네 곳에 나타난다: 가우스의 플럭스 보존, 라플라스 방정식의 기본해, 정보 밀도의 대역폭 한계, 그리고 베르트랑 정리. 앞의 셋은 정리 1과 같은 구면적에서 나오고, 베르트랑은 다른 선택, 곧 궤도가 닫힌다는 조건으로 힘의 지수 2에 이른다.
- $n = 2$ 일 때 단위 공 안의 질량은 $m = 4\pi$, 곧 총 입체각과 일치한다. 일반적으로 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ 이며, n 이 모듈 계단 위의 착지점을 고른다.

하나의 조건 — 구각당 증가가 반지름에 의존하지 않는다는 것 — 이 지수를 2로 고정한다. 같은 적분을 n 으로 넓히면, 4π 가 몇 장 쌓였는지를 세는 계단이 보이게 된다.

개정 기록

제2판(2026년 9월): 서식을 현행 템플릿에 맞추었다(요약 바로 뒤에 범위 주기를 두고, 체계 내 참고문헌에 DOI를 덧붙였다). 제3절의 베르트랑 항목을 고쳐 썼다 — 제1판은 베르트랑 정리를 “구면적이 r^2 로 늘어난다는 같은 사실에서 따라 나오는 것”이자 “천체계가 안정적으로 존속하기 위한 동역학적 필연”으로 서술했으나, 이 정리는 궤도가 닫히는 힘을 고르는 역학의 정리이다. 참고문헌의 베르트랑(1873) 제목과 Carr(1886)의 출판사를 바로잡았다. 제4절 증명의 각 변수 이름을 제1절의 정의에 맞추었다.

참고문헌

- Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
- Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.

3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [논문 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [논문 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [논문 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [논문 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [논문 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) 라이선스 하에 배포