

O teorema de unicidade de $n = 2$ para distribuições de densidade com simetria esférica

— Confirmação a partir de quatro direções (geometria, mecânica, teoria do potencial, teoria da informação) e a representação $m = 4\pi$ — [Artigo 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japão
Setembro de 2026 (Segunda edição)

— *From thinking to syncing.* —

Resumo

Para uma distribuição de densidade de lei de potência com simetria esférica $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, provamos que a massa acrescentada por casca esférica, $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$, é independente do raio r se e somente se $n = 2$ (Teorema 1). A demonstração não precisa de mais do que comparar os valores no raio **1** e no raio **2**.

Em seguida, pomos lado a lado quatro lugares onde aparece o mesmo expoente **2**. Na conservação do fluxo de Gauss e na solução fundamental da equação de Laplace, o r^2 da área da superfície esférica $4\pi r^2$ faz com que o fluxo por unidade de área e a intensidade do campo decaiam como $1/r^2$ — o mesmo r^2 do Teorema 1. Na visão do OS do Universo, o número de pixels de uma tela cresce como $4\pi r^2$, de modo que a densidade de dados por pixel decai como $1/r^2$. O teorema de Bertrand (1873) reduz a duas as forças centrais para as quais toda órbita limitada se fecha: a força do inverso do quadrado e a força de mola. É um teorema da mecânica que seleciona forças segundo **se as órbitas se fecham**, e aqui uma seleção diferente da expansão da área encontra as demais no expoente da força **2**.

Além disso, quando $n = 2$ a massa dentro da bola unitária é $m = 4\pi$, o ângulo sólido total, porque r^2 e $1/r^2$ se cancelam. Estendendo a mesma integral a um n geral, obtém-se $m(n) = 4\pi/(3 - n)$; lendo $S = 1/(3 - n)$ em $m = 4\pi \cdot S$ como “o número de folhas de 4π empilhadas”, revela-se uma escada de módulos que percorre 2π , 4π , 8π , 16π .

Alcance (scope note): O núcleo deste artigo é o Teorema 1, e o cálculo é elementar. Uma densidade $\rho \propto r^{-2}$, cuja massa encerrada cresce como $m(r) \propto r$, é conhecida em astrofísica como a esfera isotérmica singular; este artigo a enuncia como o **único expoente para o qual o crescimento por casca não depende do raio** e a coloca no ponto de partida do corpus. A lei de Gauss, a solução fundamental da equação de Laplace e o teorema de Bertrand são todos resultados padrão, e as quatro visões da Seção 3 não são quatro demonstrações independentes. Gauss e Laplace vêm da mesma área da superfície esférica que o Teorema 1, ao passo que o teorema de Bertrand seleciona forças pela condição de que as órbitas se fechem e não decorre da expansão da área (sua segunda solução, a força de mola, mostra isso). A visão do OS do Universo é uma leitura por metáfora. Para tratar $\rho = r^{-2}$ como densidade, deve-se escrever $\rho = k/r^2$ com uma constante k de dimensão $[M/L]$; $m = 4\pi$ é o seu valor sob a escolha de unidades $k = 1$ e raio 1. Nenhuma lei física nova é afirmada. **O que este artigo acrescenta** é que uma única condição — crescimento uniforme por casca — fixa o expoente em 2; que, ao pôr lado a lado as grandezas distintas em que esse 2 aparece (densidade de massa, fluxo, intensidade do campo e força), separa as que vêm do mesmo r^2 daquela que vem de uma seleção diferente; e que estender a mesma integral a um n geral produz a escada $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ e o número de folhas $S = 1/(3 - n)$.

1. Formulação do problema

Definição 1 (Configuração geométrica)

Consideremos uma distribuição de densidade de lei de potência com simetria esférica $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, onde $r = |\mathbf{x}| > 0$ e $n \in \mathbb{R}$. Em coordenadas esféricas (r, θ, φ) , o elemento de volume é $dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$.

Definição 2 (Taxa de crescimento de massa da casca esférica)

Definindo a massa total encerrada numa esfera de raio r como $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, a taxa de crescimento de massa por casca no raio r é definida como

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

Definição 3 (Condição de uniformidade / invariância de escala)

O estado em que a taxa de crescimento de massa da casca assume um valor constante $C > 0$ em todo raio $r \in (0, \infty)$ é chamado “condição de uniformidade”.

2. Teorema principal: unicidade de $n = 2$ (demonstração analítica)

Teorema 1 (Unicidade de $n = 2$)

Seja $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$). A taxa de crescimento de massa da casca esférica $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ é uma função constante em $(0, \infty)$ se e somente se $n = 2$.

Lema 1 (Constância das funções potência)

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f(r) = r^\alpha$ é constante em $(0, \infty)$ se e somente se $\alpha = 0$.

Demonstração do Lema 1

Suficiência ($\alpha = 0 \implies f$ é constante): se $\alpha = 0$, então $f(r) = r^0 = 1$ identicamente.

Necessidade (f constante $\implies \alpha = 0$): provamos a contrapositiva. Suponha $\alpha \neq 0$. Comparando os valores em $r = 1$ e $r = 2$: $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$. A exponencial $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, pois $\ln 2 > 0$. Logo $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, de modo que $f(r)$ não é constante.

Demonstração do Teorema 1

A taxa de crescimento de massa da casca é $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$. Como $4\pi > 0$, dm/dr ser constante equivale a r^{2-n} ser constante em $(0, \infty)$. Pelo Lema 1, $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$. Quando $n = 2$, $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (constante).

3. Quatro lugares onde aparece o expoente 2

3.1 A via de Gauss — geometria e conservação do fluxo

No espaço tridimensional, a área da superfície de uma esfera de raio r é $S(r) = 4\pi r^2$. Quando um fluxo conservado Φ_{total} sai do centro em todas as direções, o fluxo por unidade de área $j(r)$ decai na razão inversa do crescimento da área:

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

O r^2 que atua aqui é o mesmo r^2 da área da superfície esférica que aparece em $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ do Teorema 1.

3.2 A via de Laplace / Green — teoria do potencial e a solução fundamental

No espaço livre tridimensional, a solução fundamental (função de Green) da equação de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ para uma fonte pontual é $\Phi(r) \propto 1/r$. Tomando o seu gradiente, a intensidade do campo é

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

O $1/r$ da solução fundamental é ele próprio fixado pelo fluxo da fonte pontual que atravessa a esfera de raio r , de modo que a sua raiz é a mesma da via de Gauss.

3.3 A via do OS do Universo — densidade de informação e largura de banda de renderização

Considerando o universo como um sistema de processamento de informação (OS), o número de pixels de uma tela de exibição (UI) de raio r cresce em proporção à área $4\pi r^2$. Para manter constantes a carga total de renderização e a largura de banda de comunicação (um processo de descarte), a densidade de dados $\rho(r)$ por pixel deve ser inversamente proporcional à extensão da tela:

$$\text{Carga total} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Isto reformula a condição do Teorema 1, “ $4\pi r^2 \rho$ é constante”, na linguagem da renderização.

3.4 A via de Bertrand — forças cujas órbitas se fecham

Pelo teorema de Bertrand (1873), entre os campos de forças centrais, toda órbita limitada se fecha somente quando o potencial $V(r) \propto r^\beta$ tem $\beta = -1$ (a força do inverso do quadrado $F \propto 1/r^2$) ou $\beta = 2$ (a força de mola $F \propto r$, o oscilador harmônico). A razão pela qual as órbitas se fecham sob a força do inverso do quadrado é que, além do momento angular, conserva-se mais uma grandeza — o vetor de Laplace–Runge–Lenz —, uma simetria oculta própria de $n = 2$ (Artigo 79).

O critério pelo qual este teorema seleciona é **se as órbitas se fecham**. Ele não decorre da expansão da área da superfície esférica: sua segunda solução, a força de mola, é selecionada sem nenhuma referência à conservação do fluxo. Que a força

em torno de uma massa pontual em três dimensões seja do inverso do quadrado (via de Gauss) e que as órbitas se fechem sob a força do inverso do quadrado (Bertrand) são **duas seleções separadas que se encontram no expoente da força 2**.

O **2** aqui é o expoente da força, não o expoente da densidade de massa do Teorema 1. Para uma distribuição cuja própria densidade de massa é $\rho = k/r^2$, a massa encerrada é proporcional ao raio, de modo que a força vai como $1/r$:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ é a massa da partícula de prova). Essa força não é nenhuma das duas soluções de Bertrand.

3.5 Como as quatro visões se relacionam

Das quatro, as três vias de Gauss, de Laplace e do OS do Universo obtêm **$1/r^2$ da mesma área da superfície esférica $4\pi r^2$** que o Teorema 1. Só Bertrand seleciona por um critério diferente — o fechamento das órbitas — e junta-se a elas no expoente da força **2**. O expoente **2** aparece em quatro lugares, mas o que ele conta é diferente a cada vez: densidade de massa, fluxo, intensidade do campo e força.

4. Demonstração por integral múltipla da massa limite $m = 4\pi$

Teorema 2 (Cancelamento até a massa limite $m = 4\pi$)

Quando $n = 2$, isto é, $\rho(r) = 1/r^2$, a massa total m sobre a bola unitária $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ tem a sua dependência da distância cancelada e é igual ao ângulo sólido total 4π .

Demonstração.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. $m(n)$ como escada de módulos

Realizando a integral acima para um n geral, a massa total dentro da bola unitária é

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Resolvendo para o n em que m assume um valor de módulo $2^k\pi$, obtém-se a forma fechada

$$n = 3 - 2^{2-k}.$$

Módulo	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	$5/2$	25.1327
16π	$11/4$	50.2655

Ou seja, uma única família $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ gera a escada de módulos, e o expoente n seleciona em que módulo ela aterrissa.

5.1 Representação pelo número de folhas: $3 - n$ é o recíproco do número de folhas

Escrevendo o que precede como $m = 4\pi \cdot S$, obtém-se

$$S = \frac{1}{3-n} \quad \text{isto é} \quad 3 - n = \frac{1}{S}.$$

Lendo S como “quantas folhas de 4π estão empilhadas”, a escada toma a seguinte forma.

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Leitura
0	3	$1/3$	$4\pi/3$	Volume da bola unitária
1	2	$1/2$	2π	Metade de 4π
2	1	1	4π	Uma folha de 4π
$5/2$	$1/2$	2	8π	Duas folhas de 4π (frente e verso)
$11/4$	$1/4$	4	16π	Quatro folhas de 4π
$23/8$	$1/8$	8	32π	Oito folhas de 4π

O expoente n determina o número de folhas sobrepostas. Nesta representação, $n = 2$ é o caso de “exatamente uma folha”.

Os termos da escada 2π , 4π , 8π coincidem com as constantes que o corpus tratou como módulos (Artigo 13).

5.2 Por que $16\pi^2$ não está nesta escada

O Artigo 13 também lista $16\pi^2$ como módulo, mas **ele fica fora desta família**. Expresso em folhas,

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

de modo que o **próprio número de folhas contém π** e não é um número inteiro de folhas. Em outras palavras, **$16\pi^2$ não é uma grandeza alcançável empilhando 4π** .

A distinção entre 16π e $16\pi^2$:

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — **empilhamento** (quatro folhas). É um termo desta escada.
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — **produto** (um produto direto de ângulos sólidos). Não está nesta escada.

Os dois diferem não só numericamente, mas na **regra de geração**. $16\pi^2$ provém do produto direto $(4\pi)^2$, ou da normalização de um índice topológico (Artigos 29 e 32), etc. — outra linhagem. Não contar na mesma família grandezas de origem diferente é a disciplina do Artigo 48.

5.3 Uma questão em aberto: a origem do fator 2

$S = 2(8\pi)$ é lido neste corpus como “duas folhas, frente e verso”. Por outro lado, o fator 2 no 8π da equação de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ tem uma **origem concreta no limite newtoniano**, $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ (que surge da linearização e da inversão de traço necessárias para coincidir com $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$).

Se esses dois “2” compartilham uma origem não é decidido neste artigo. Se for encontrado um caminho que os ligue, torna-se uma afirmação; se não, permanece uma coincidência numérica. **Deixamos isso como questão em aberto.**

6. Conclusão

Este artigo mostrou o seguinte.

1. A taxa de crescimento de massa da casca esférica $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ é constante em $(0, \infty)$ somente para $n = 2$ (Teorema 1).
2. O expoente **2** aparece em quatro lugares: a conservação do fluxo de Gauss, a solução fundamental da equação de Laplace, o limite de largura de banda da densidade de informação e o teorema de Bertrand. Os três primeiros vêm da mesma área da superfície esférica que o Teorema 1; Bertrand chega ao expoente da força **2** por uma seleção diferente, a condição de que as órbitas se fechem.

3. Quando $n = 2$, a massa dentro da bola unitária é $m = 4\pi$, isto é, **coincide com o ângulo sólido total**. Em geral $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, e n seleciona o ponto de aterrissagem na escada de módulos.

Uma única condição — que o crescimento por casca não dependa do raio — fixa o expoente em **2**. Estender a mesma integral em n traz à vista uma escada que conta quantas folhas de 4π estão empilhadas.

Registro de revisões

Segunda edição (setembro de 2026): A forma foi alinhada ao modelo atual (uma nota de alcance colocada logo após o resumo, e DOIs acrescentados às referências do corpus). O item de Bertrand da Seção 3 foi reescrito: a primeira edição descrevia o teorema de Bertrand como “decorrente do mesmo fato de que a área esférica cresce como r^2 ” e como “a necessidade dinâmica para que um sistema celeste persista de forma estável”, ao passo que o teorema é um teorema da mecânica que seleciona as forças cujas órbitas se fecham. O título de Bertrand (1873) e a editora de Carr (1886) nas referências foram corrigidos. Os nomes das variáveis angulares na demonstração da Seção 4 foram alinhados com a definição da Seção 1.

Referências

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Artigo 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [Artigo 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [Artigo 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Artigo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [Artigo 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

