

Теорема единственности $n = 2$ для сферически-симметричных распределений плотности

— Подтверждение с четырёх сторон (геометрия, механика, теория потенциала, теория информации) и представление $m = 4\pi$ — [Статья 01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Япония
Сентябрь 2026 (Второе издание)

— *From thinking to syncing.* —

Аннотация

Для сферически-симметричного степенного распределения плотности $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$) в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ мы доказываем, что масса, добавляемая на каждый сферический слой, $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$, не зависит от радиуса r тогда и только тогда, когда $n = 2$ (Теорема 1). Для доказательства достаточно сравнить значения при радиусе 1 и радиусе 2.

Затем мы ставим рядом четыре места, где появляется один и тот же показатель 2. В сохранении потока Гаусса и в фундаментальном решении уравнения Лапласа r^2 площади сферы $4\pi r^2$ заставляет поток на единицу площади и напряжённость поля убывать как $1/r^2$ — это тот же r^2 , что и в Теореме 1. В представлении ОС Вселенной число пикселей экрана растёт как $4\pi r^2$, поэтому плотность данных на пиксель убывает как $1/r^2$. Теорема Бертрана (1873) сужает центральные силы, при которых замыкается каждая ограниченная орбита, до двух: силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и силы пружины. Это теорема механики, отбирающая силы по тому, замыкаются ли орбиты, и здесь отбор, отличный от расширения площади, встречается с остальными на показателе силы 2.

Кроме того, при $n = 2$ масса внутри единичного шара равна $m = 4\pi$ — полному телесному углу, поскольку r^2 и $1/r^2$ взаимно сокращаются. Распространяя тот же интеграл на произвольное n , получаем $m(n) = 4\pi/(3-n)$; если читать $S = 1/(3-n)$ в $m = 4\pi \cdot S$ как «число сложенных листов 4π », проявляется лестница модулей, проходящая через $2\pi, 4\pi, 8\pi, 16\pi$.

Рамки статьи (scope note): Ядро этой статьи — Теорема 1, и вычисление элементарно. Плотность $\rho \propto r^{-2}$, у которой заключённая масса растёт как $m(r) \propto r$, известна в астрофизике как сингулярная изотермическая сфера; эта статья формулирует её как **единственный показатель, при котором прирост на слой не зависит от радиуса**, и ставит её в исходную точку корпуса. Закон Гаусса, фундаментальное решение уравнения Лапласа и теорема Бертрана — всё это стандартные результаты, и четыре взгляда раздела 3 не являются четырьмя независимыми доказательствами. Гаусс и Лаплас исходят из той же площади сферы, что и Теорема 1, тогда как теорема Бертрана отбирает силы по условию замыкания орбит и не следует из расширения площади (это показывает её второе решение, сила пружины). Взгляд ОС Вселенной — это прочтение через метафору. Чтобы рассматривать $\rho = r^{-2}$ как плотность, следует писать $\rho = k/r^2$ с постоянной k размерности $[M/L]$; $m = 4\pi$ — её значение при выборе единиц $k = 1$ и радиуса 1. Никакой новый физический закон не утверждается. **Что добавляет эта статья:** одно условие — равномерный прирост на слой — фиксирует показатель на **2**; ставя рядом различные величины, в которых появляется это **2** (плотность массы, поток, напряжённость поля и сила), статья отделяет те, что происходят из того же r^2 , от той одной, что происходит из иного отбора; а распространение того же интеграла на произвольное n даёт лестницу $m(n) = 4\pi/(3 - n)$ и число листов $S = 1/(3 - n)$.

1. Постановка задачи

Определение 1 (Геометрическая постановка)

Рассмотрим сферически-симметричное степенное распределение плотности $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$ в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, где $r = |\mathbf{x}| > 0$ и $n \in \mathbb{R}$. В сферических координатах (r, θ, φ) элемент объёма равен $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Определение 2 (Скорость роста массы сферического слоя)

Определив полную массу, заключённую внутри сферы радиуса r , как $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, скорость роста массы на слой при радиусе r определим как

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

Определение 3 (Условие однородности / масштабная инвариантность)

Состояние, в котором скорость роста массы слоя принимает постоянное значение $C > 0$ при любом радиусе $r \in (0, \infty)$, называется «условием однородности».

2. Основная теорема: единственность $n = 2$ (аналитическое доказательство)

Теорема 1 (Единственность $n = 2$)

Пусть $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$). Скорость роста массы сферического слоя $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ является постоянной функцией на $(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $n = 2$.

Лемма 1 (Постоянство степенных функций)

При $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $f(r) = r^\alpha$ постоянна на $(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$.

Доказательство леммы 1

Достаточность ($\alpha = 0 \implies f$ постоянна): если $\alpha = 0$, то $f(r) = r^0 = 1$ тождественно.

Необходимость (f постоянна $\implies \alpha = 0$): докажем контрапозицию. Пусть $\alpha \neq 0$. Сравним значения при $r = 1$ и $r = 2$: $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$. Показательная функция $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, так как $\ln 2 > 0$. Следовательно, $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, так что $f(r)$ не постоянна.

Доказательство теоремы 1

Скорость роста массы слоя равна $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$. Поскольку $4\pi > 0$, постоянство dm/dr равносильно постоянству r^{2-n} на $(0, \infty)$. По лемме 1, $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$. При $n = 2$ имеем $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (постоянная).

3. Четыре места, где появляется показатель 2

3.1 Путь Гаусса — геометрия и сохранение потока

В трёхмерном пространстве площадь сферы радиуса r равна $S(r) = 4\pi r^2$. Когда сохраняющийся поток Φ_{total} выходит из центра во всех направлениях, поток на единицу площади $j(r)$ убывает обратно пропорционально росту площади:

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

Действующий здесь r^2 — это тот же r^2 площади сферы, что и в $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ Теоремы 1.

3.2 Путь Лапласа / Грина — теория потенциала и фундаментальное решение

В свободном трёхмерном пространстве фундаментальное решение (функция Грина) уравнения Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$ для точечного источника есть $\Phi(r) \propto 1/r$. Беря его градиент, получаем напряжённость поля

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Сам $1/r$ фундаментального решения определяется тем, что поток точечного источника проходит через сферу радиуса r , так что его корень тот же, что и у пути Гаусса.

3.3 Путь ОС Вселенной — плотность информации и полоса пропускания рендеринга

Если рассматривать Вселенную как систему обработки информации (ОС), число пикселей экрана (UI) радиуса r растёт пропорционально площади $4\pi r^2$. Чтобы полная нагрузка рендеринга и полоса пропускания связи оставались постоянными (процесс прореживания), плотность данных $\rho(r)$ на пиксель должна быть обратно пропорциональна протяжённости экрана:

$$\text{Полная нагрузка} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Это переформулировка условия Теоремы 1, « $4\pi r^2 \rho$ постоянно», на языке рендеринга.

3.4 Путь Бертрана — силы, при которых орбиты замыкаются

По теореме Бертрана (1873), среди полей центральных сил каждая ограниченная орбита замыкается лишь тогда, когда потенциал $V(r) \propto r^\beta$ имеет $\beta = -1$ (сила обратных квадратов $F \propto 1/r^2$) или $\beta = 2$ (сила пружины $F \propto r$, гармонический осциллятор). Орбиты замыкаются при силе обратных квадратов потому, что, помимо момента импульса, сохраняется ещё одна величина — вектор Лапласа–Рунге–Ленца, — скрытая симметрия, присущая только $n = 2$ (статья 79).

Критерий, по которому отбирает эта теорема, — **замыкаются ли орбиты**. Он не следует из расширения площади сферы — её второе решение, сила пружины, отбирается без всякой ссылки на сохранение потока. То, что сила вокруг точечной массы в трёх измерениях обратно пропорциональна квадрату (путь Гаусса), и то, что орбиты замыкаются при силе обратных квадратов (Бертран), — это **два отдельных отбора, встречающихся на показателе силы 2**.

Здесь **2** — это показатель силы, а не показатель плотности массы из Теоремы 1. Для распределения, у которого сама плотность массы равна $\rho = k/r^2$, заключённая масса пропорциональна радиусу, так что сила ведёт себя как $1/r$:

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

(μ — масса пробной частицы). Эта сила не является ни одним из двух решений Бертрана.

3.5 Как связаны четыре взгляда

Из четырёх три пути — Гаусса, Лапласа и ОС Вселенной — получают $1/r^2$ из той же площади сферы $4\pi r^2$, что и Теорема 1. Лишь Бертран отбирает по иному критерию — замыканию орбит — и присоединяется к ним на показателе силы **2**. Показатель **2** появляется в четырёх местах, но то, что он считает, каждый раз разное: плотность массы, поток, напряжённость поля и сила.

4. Доказательство предельной массы $m = 4\pi$ через кратный интеграл

Теорема 2 (Сокращение до предельной массы $m = 4\pi$)

При $n = 2$, т. е. $\rho(r) = 1/r^2$, у полной массы m по единичному шару $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ зависимость от расстояния сокращается, и она равна полному телесному углу 4π .

Доказательство.

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. $m(n)$ как лестница модулей

Выполняя приведённый выше интеграл для произвольного n , получаем полную массу внутри единичного шара

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

Решая относительно того n , при котором m принимает значение модуля $2^k\pi$, получаем замкнутую форму

$n = 3 - 2^{2-k}.$

Модуль	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	$5/2$	25.1327
16π	$11/4$	50.2655

То есть одно семейство $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ порождает лестницу модулей, а показатель n выбирает, на какой модуль оно приходится.

5.1 Представление числом листов: $3 - n$ — величина, обратная числу листов

Записывая сказанное выше как $m = 4\pi \cdot S$, получаем

$S = \frac{1}{3-n}$

т.\,е. $3 - n = \frac{1}{S}.$

Если читать S как «сколько листов 4π сложено», лестница принимает следующий вид.

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	Прочтение
0	3	1/3	$4\pi/3$	Объём единичного шара
1	2	1/2	2π	Половина 4π
2	1	1	4π	Один лист 4π
$5/2$	$1/2$	2	8π	Два листа 4π (лицевая и оборотная стороны)
$11/4$	$1/4$	4	16π	Четыре листа 4π
$23/8$	$1/8$	8	32π	Восемь листов 4π

Показатель n определяет число наложенных листов. В этом представлении $n = 2$ — случай «ровно одного листа».

Члены лестницы 2π , 4π , 8π совпадают с константами, которые корпус рассматривал как модули (статья 13).

5.2 Почему $16\pi^2$ не лежит на этой лестнице

Статья 13 также относит $16\pi^2$ к модулям, но оно лежит вне этого семейства. В листах:

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

так что само число листов содержит π и не является целым числом листов. Иными словами, $16\pi^2$ не является величиной, достижимой складыванием 4π .

Различие между 16π и $16\pi^2$:

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — складывание (четыре листа). Это член данной лестницы.
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — произведение (прямое произведение телесных углов). Оно не лежит на этой лестнице.

Они различаются не только численно, но и **правилом порождения**. $16\pi^2$ происходит из прямого произведения $(4\pi)^2$ или из нормировки топологического индекса (статьи 29 и 32) и т. п. — иная родословная. Не относить величины разного происхождения к одному семейству — дисциплина статьи 48.

5.3 Открытый вопрос: происхождение множителя 2

$S = 2(8\pi)$ читается в этом корпусе как «два листа, лицевая и обратная стороны». С другой стороны, множитель 2 в 8π уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ имеет конкретное происхождение в ньютоновском пределе, $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ (оно возникает из линеаризации и обращения следа, необходимых для согласования с $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$).

Имеют ли эти две «2» общее происхождение, в этой статье не решается. Если найдётся путь, связывающий их, это станет утверждением; если нет, это останется численным совпадением. **Мы оставляем это как открытый вопрос.**

6. Заключение

Эта статья показала следующее.

1. Скорость роста массы сферического слоя $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ постоянна на $(0, \infty)$ только при $n = 2$ (Теорема 1).
2. Показатель 2 появляется в четырёх местах: в сохранении потока Гаусса, в фундаментальном решении уравнения Лапласа, в ограничении полосы пропускания для плотности информации и в теореме Бертрана. Первые три исходят из той же площади сферы, что и Теорема 1; Бертран приходит к показателю силы 2 через иной отбор — условие замыкания орбит.

3. При $n = 2$ масса внутри единичного шара равна $m = 4\pi$, т. е. совпадает с полным телесным углом. В общем случае $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$, и n выбирает точку приземления на лестнице модулей.

Одно условие — что прирост на слой не зависит от радиуса — фиксирует показатель на 2. Распространяя тот же интеграл по n , мы видим лестницу, считающую, сколько листов 4π сложено.

Журнал редакций

Второе издание (сентябрь 2026): оформление приведено в соответствие с текущим шаблоном (примечание о рамках сразу после аннотации и DOI в ссылках на корпус). Пункт о Бертрane в разделе 3 переписан — первое издание описывало теорему Бертрана как «следующую из того же факта, что площадь сферы растёт как r^2 » и как «динамическую необходимость устойчивого существования небесной системы», тогда как эта теорема — теорема механики, отбирающая силы, при которых орбиты замыкаются. Исправлены название работы Бертрана (1873) и издатель книги Карра (1886) в списке литературы. Имена угловых переменных в доказательстве раздела 4 согласованы с определением в разделе 1.

Литература

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [Статья 13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [Статья 29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [Статья 32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Статья 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [Статья 79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

