

球对称密度分布的 $n = 2$ 唯一性定理

——从四个方向（几何、力学、势论、信息论）的确认与表示 $m = 4\pi$ ——[论文01]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, 日本

2026 年 9 月（第二版）

— From thinking to syncing. —

摘要

对于球对称的幂律密度分布 $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$)，在三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中，我们证明：每个球壳所增加的质量 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ 与半径 r 无关，当且仅当 $n = 2$ （定理 1）。证明只需比较半径 1 与半径 2 处的值。

接着，我们把同一个指数 2 出现的四个地方并列起来。在高斯的通量守恒和拉普拉斯方程的基本解中， r^2 （球面积 $4\pi r^2$ 的增长）使单位面积的通量与场强按 $1/r^2$ 衰减——这与定理 1 中的 r^2 是同一个。在宇宙OS的观点中，屏幕的像素数按 $4\pi r^2$ 增长，因此每个像素的数据密度按 $1/r^2$ 衰减。贝特朗定理（1873）把使一切有界轨道闭合的有心力缩小到两种：平方反比力与弹簧力。这是一条按轨道是否闭合来选择力的力学定理；在这里，一种不同于面积扩展的选择，在力的指数 2 处与其余几条会合。

此外，当 $n = 2$ 时，单位球内的质量为 $m = 4\pi$ ，即总立体角，因为 r^2 与 $1/r^2$ 相互抵消。把同一积分推广到一般的 n ，得到 $m(n) = 4\pi/(3-n)$ ；把 $S = 1/(3-n)$ 在 $m = 4\pi \cdot S$ 中读作“叠放的 4π 的张数”，便会出现一条经过 $2\pi, 4\pi, 8\pi, 16\pi$ 的模块阶梯。

本文的射程（scope note）：本文的核心是定理 1，计算是初等的。密度 $\rho \propto r^{-2}$ 所包含的质量按 $m(r) \propto r$ 增长，在天体物理中被称为奇异等温球——本文把它表述为每层增长不依赖于半径的唯一指数，并将其置于本体系的出发点。高斯定律、拉普拉斯方程的基本解和贝特朗定理都是标准结果，第 3 节的四种观点并不是四个独立的证明。高斯与拉普拉斯来自与定理 1 相同的球面积，而贝特朗定理是按轨道闭合这一条件来选择力的，并不由面积的扩展推出（其第二个解——弹簧力——表明了这一点）。宇宙OS的观点是一种借助隐喻的解读。若要把 $\rho = r^{-2}$ 当作密度来处理，应写成 $\rho = k/r^2$ ，其中常数 k 的量纲为 $[M/L]$ ； $m = 4\pi$ 是在单位选择 $k = 1$ 、半径 1 之下的值。本文不主张任何新的物理定律。本文所增添的是：单一条件——每层均匀增长——把指数固定为 2；通过把这个 2 所出现的各个不同的量（质量密度、通量、场强与力）并列起来，把来自同一个 r^2 的那些与来自另一种选择的那一个区分开来；以及把同一积分推广到一般的 n ，得到阶梯 $m(n) = 4\pi/(3-n)$ 与张数 $S = 1/(3-n)$ 。

1. 问题的提出

定义 1 (几何设定)

考虑球对称幂律密度分布 $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r) = r^{-n}$, 它位于三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 其中 $r = |\mathbf{x}| > 0$, $n \in \mathbb{R}$ 。在球坐标 (r, θ, φ) 中, 体积元为 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ 。

定义 2 (球壳质量增长率)

把半径为 r 的球内所包含的总质量定义为 $m(r) = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$, 则半径 r 处每层的质量增长率定义为

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = 4\pi r^{2-n}.$$

定义 3 (均匀性条件/尺度不变性)

壳层质量增长率取常数值 $C > 0$, 且对一切半径 $r \in (0, \infty)$ 都如此, 这一状态称为“均匀性条件”。

2. 主定理: $n = 2$ 的唯一性 (解析证明)

定理 1 ($n = 2$ 的唯一性)

设 $\rho(r) = r^{-n}$ ($n \in \mathbb{R}$)。球壳质量增长率 $dm/dr(r) = 4\pi r^{2-n}$ 是 $(0, \infty)$ 上的常函数, 当且仅当 $n = 2$ 。

引理 1 (幂函数的常值性)

对 $\alpha \in \mathbb{R}$, 函数 $f(r) = r^\alpha$ 在 $(0, \infty)$ 上为常数, 当且仅当 $\alpha = 0$ 。

引理 1 的证明

充分性 ($\alpha = 0 \implies f$ 为常数) : 若 $\alpha = 0$, 则 $f(r) = r^0 = 1$ 恒成立。

必要性 (f 为常数 $\implies \alpha = 0$) : 证明其逆否命题。设 $\alpha \neq 0$ 。比较 $r = 1$ 与 $r = 2$ 处的值 : $f(1) = 1^\alpha = 1$, $f(2) = 2^\alpha$ 。指数函数 $g(\alpha) = 2^\alpha = e^{\alpha \ln 2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增, 因为 $\ln 2 > 0$ 。因此 $\alpha \neq 0 \implies 2^\alpha \neq 2^0 = 1 \implies f(2) \neq f(1)$, 故 $f(r)$ 不是常数。

定理 1 的证明

壳层质量增长率为 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ 。由于 $4\pi > 0$, dm/dr 为常数等价于 r^{2-n} 在 $(0, \infty)$ 上为常数。由引理 1, $\alpha = 2 - n = 0 \iff n = 2$ 。当 $n = 2$ 时, $dm/dr = 4\pi r^0 = 4\pi$ (常数)。

3. 指数 2 出现的四个地方

3.1 高斯之路——几何与通量守恒

在三维空间中, 半径为 r 的球面积为 $S(r) = 4\pi r^2$ 。当守恒通量 Φ_{total} 从中心向各个方向发出时, 单位面积的通量 $j(r)$ 与面积的增长成反比地减小 :

$$j(r) = \frac{\Phi_{\text{total}}}{S(r)} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

这里起作用的 r^2 , 就是球面积的那个 r^2 , 与定理 1 的 $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ 中的相同。

3.2 拉普拉斯/格林之路——势论与基本解

在三维自由空间中, 拉普拉斯方程 $\nabla^2 \Phi = 0$ 对点源的基本解 (格林函数) 为 $\Phi(r) \propto 1/r$ 。取其梯度, 场强为

$$-\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

基本解的 $1/r$ 本身就是由点源的通量穿过半径为 r 的球面所决定的, 因此它的根与高斯之路相同。

3.3 宇宙OS之路——信息密度与渲染带宽

把宇宙看作一个信息处理系统 (OS), 半径为 r 的显示屏 (UI) 的像素数与面积 $4\pi r^2$ 成正比地增长。为使总渲染负荷与通信带宽保持恒定 (一种剔除过程), 每个像素的数据密度 $\rho(r)$ 必须与屏幕的扩展成反比 :

$$\text{总负荷} = \rho(r) \times (4\pi r^2) = \text{Const.} \iff \rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

这是用渲染的语言重述定理 1 的条件“ $4\pi r^2 \rho$ 为常数”。

3.4 贝特朗之路——轨道闭合的力

根据贝特朗定理（1873），在有心力场中，只有当势 $V(r) \propto r^\beta$ 满足 $\beta = -1$ （平方反比力 $F \propto 1/r^2$ ）或 $\beta = 2$ （弹簧力 $F \propto r$ ，即谐振子）时，一切有界轨道才会闭合。平方反比力下轨道之所以闭合，是因为除角动量之外还有一个量守恒——拉普拉斯-龙格-楞次矢量——这是 $n = 2$ 所特有的隐藏对称性（论文79）。

这条定理据以选择的标准是轨道是否闭合。它并不由球面积的扩展推出——其第二个解弹簧力的选出，与通量守恒毫无关系。三维空间中点质量周围的力为平方反比（高斯之路），与平方反比力下轨道闭合（贝特朗），是在力的指数 **2** 处会合的两个各自独立的选择。

这里的 **2** 是力的指数，而不是定理 1 中质量密度的指数。对于质量密度本身为 $\rho = k/r^2$ 的分布，所包含的质量与半径成正比，因此力按 $1/r$ 变化：

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2} \implies m(r) = 4\pi k r \implies F(r) = \frac{G m(r) \mu}{r^2} \propto \frac{1}{r}$$

（ μ 为试验粒子的质量）。这个力不是贝特朗两个解中的任何一个。

3.5 四种观点之间的关系

四者之中，高斯、拉普拉斯与宇宙OS三条路所得到的 $1/r^2$ ，都来自与定理 1 相同的球面积 $4\pi r^2$ 。只有贝特朗按另一条标准——轨道的闭合——进行选择，并在力的指数 **2** 处与它们会合。指数 **2** 出现在四个地方，但它每次所计数的东西各不相同：质量密度、通量、场强与力。

4. 极限质量 $m = 4\pi$ 的多重积分证明

定理 2（抵消为极限质量 $m = 4\pi$ ）

当 $n = 2$ ，即 $\rho(r) = 1/r^2$ 时，总质量 m 在单位球 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ 上对距离的依赖被抵消，等于总立体角 4π 。

证明

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2}\right) r^2 dr = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi.$$

5. 作为模块阶梯的 $m(n)$

对一般的 n 进行上述积分，单位球内的总质量为

$$m(n) = \int d\Omega \int_0^1 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n} \quad (n < 3).$$

求出这样的 n ：在该处 m 取模块值 $2^k\pi$ 。于是得到闭式

$n = 3 - 2^{2-k}.$

模块	n	m
2π	1	6.2832
4π	2	12.5664
8π	5/2	25.1327
16π	11/4	50.2655

也就是说，单一族 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ 生成模块阶梯，而指数 n 选择它落在哪一个模块上。

5.1 张数表示： $3-n$ 是张数的倒数

把上式写成 $m = 4\pi \cdot S$ ，得到

$S = \frac{1}{3-n}$

即 $3-n = \frac{1}{S}.$

把 S 读作“叠放了多少张 4π ”，阶梯呈如下形式。

n	$3 - n$	$S = \frac{1}{3-n}$	m	解读
0	3	1/3	$4\pi/3$	单位球的体积
1	2	1/2	2π	4π 的一半
2	1	1	4π	一张 4π
5/2	1/2	2	8π	两张 4π （正面与背面）
11/4	1/4	4	16π	四张 4π
23/8	1/8	8	32π	八张 4π

指数 n 决定重叠的张数。在这种表示中， $n = 2$ 是“恰好一张”的情形。

阶梯中的项 $2\pi, 4\pi, 8\pi$ 与本体系作为模块处理过的常数一致（论文13）。

5.2 为什么 $16\pi^2$ 不在这条阶梯上

论文13 也把 $16\pi^2$ 列为模块，但它位于这个族之外。以张数表示，

$$S = \frac{16\pi^2}{4\pi} = 4\pi = 12.566\dots,$$

所以张数本身含有 π ，不是整数张。换言之， $16\pi^2$ 不是通过叠放 4π 所能到达的量。

16π 与 $16\pi^2$ 的区别：

- $16\pi = 4\pi \times 4$ — 叠放（四张）。它是这条阶梯上的一项。
- $16\pi^2 = 4\pi \times 4\pi$ — 乘积（立体角的直积）。它不在这条阶梯上。

二者不仅数值不同，生成规则也不同。 $16\pi^2$ 来源于直积 $(4\pi)^2$ ，或拓扑指标的归一化（论文29 与 32）等——属于另一个谱系。不把起源不同的量算在同一个族里，是论文48 的规矩。

5.3 一个开放问题：因子 2 的起源

$S = 2$ (8π) 在本体系中读作“两张，正面与背面”。另一方面， 8π 中的因子 2——即爱因斯坦方程 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ 里的那个——有着在牛顿极限 $G_{00} \rightarrow 2\nabla^2\Phi$ 中的具体来源（它来自为与 $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ 相符而需要的线性化与迹反转）。

这两个“2”是否同源，本文不作判定。若找到连接二者的路径，它就成为一个主张；若找不到，它仍是数值上的巧合。我们把它作为开放问题留下。

6. 结论

本文表明了以下几点。

1. 球壳质量增长率 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ 在 $(0, \infty)$ 上为常数，仅当 $n = 2$ （定理 1）。
2. 指数 **2** 出现在四个地方：高斯的通量守恒、拉普拉斯方程的基本解、信息密度的带宽限制，以及贝特朗定理。前三者来自与定理 1 相同的球面积；贝特朗则通过另一种选择——轨道闭合的条件——到达力的指数 **2**。
3. 当 $n = 2$ 时，单位球内的质量为 $m = 4\pi$ ，即与总立体角一致。一般地 $m(n) = \frac{4\pi}{3-n}$ ，而 n 选择在模块阶梯上的落点。

单一条件——每层的增长不依赖于半径——把指数固定为 **2**。把同一积分沿 n 推广，便看见一条计数叠放了多少张 4π 的阶梯。

修订记录

第二版（2026 年 9 月）：按现行模板调整了格式（在摘要之后紧接射程注记，并为本体系的参考文献补上 DOI）。改写了第 3 节中贝特朗一项——第一版把贝特朗定理描述为“源于球面积按 r^2 增长这同一事实”以及“天体系统稳定存续的动力学必然”，而该定理是一条选择轨道闭合之力的力学定理。更正了参考文献中贝特朗（1873）的标题与 Carr（1886）的出版者。使第 4 节证明中的角变量名称与第 1 节的定义一致。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*.
2. Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.
4. Laplace, P.-S. (1799). *Traité de mécanique céleste*.
5. Carr, G. S. (1886). *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*. Francis Hodgson, London.
6. Yamagishi, Y. (2026). *Physical Law as a Description Language of the Universe OS* [论文13]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404917
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi–Adler–Bardeen Note* [论文29]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601581
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Unified Budget Canvas Theory* [论文32]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601849
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [论文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525

10. Yamagishi, Y. (2026). *The Hidden Symmetry Unique to $n=2$* [论文79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · 依据 Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) 许可