

Die Poincaré-Vermutung ist in jeder Kategorie eine andere Frage, und nur die Dimension vier bleibt sowohl stückweise linear als auch glatt offen

— die Dimensionen 5 und 6 liegen dort, wo sich der Bereich, in dem PL und glatt übereinstimmen, mit dem Bereich des h-Kobordismus-Satzes überlappt, und sind daher sogar glatt entschieden, während die Dimension 4 nur im ersten liegt — der Separator ist, ob die Dimension höchstens 6 oder mindestens 5 ist — [Aufsatz 1003]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Die Poincaré-Vermutung fragt, ob eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die zur n -Sphäre homotopieäquivalent ist, die Sphäre ist, doch sie wird zu drei verschiedenen Fragen, je nachdem, ob „dasselbe wie die Sphäre“ in der topologischen (TOP), der stückweise linearen (PL) oder der glatten (DIFF) Kategorie gelesen wird. Dieser Aufsatz baut eine Tabelle mit den Dimensionen als Spalten und den drei Kategorien als Zeilen und zählt ihre Zellen mit übertragenen Sätzen und aus Bernoulli-Zahlen berechneten Zahlen. Es wird kein neuer Satz beansprucht und keine Zelle gelöst.

Erstens, die topologische Zeile gilt in jeder Dimension, und die einzige offene Zelle der PL-Zeile ist die Dimension 4 —die Dimensionen 1 und 2 sind klassisch, 3 ist Perelman, 4 ist Freedman (1982), und 5 und darüber sind Smale (1961) und Newman (1966). Unter den Dimensionen 1 bis 8 ist die einzige, die sowohl PL als auch glatt offen ist, die Dimension 4 (Abschnitt 2).

Zweitens, und das ist der Kern. Die Dimensionen 5 und 6 liegen in der Überlappung zweier Bereiche und sind sogar glatt entschieden, während die Dimension 4 nur in einem liegt —der Bereich, in dem PL und glatt dieselben Strukturen liefern (Dimension höchstens 6), und der Bereich des h -Kobordismus-Satzes (Dimension mindestens 5) überlappen sich in den 2 Dimensionen 5 und 6, wo die PL-Vermutung die glatte mitträgt. Nur im ersten Bereich liegen die 4 Dimensionen 1, 2, 3, 4; in 1 bis 3 fallen die drei Kategorien in eine zusammen und die Frage ist geschlossen, und nur 4 bleibt sowohl PL als auch glatt offen (Abschnitt 3).

Drittens, die glatte Zeile für die Dimensionen 1 bis 139 hat 8 mit eindeutiger Struktur, 1 offene und 130 mit exotischen Sphären —die Dimensionen mit eindeutiger glatter Struktur sind 1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61 (übertragen: die ungeraden aus Wang und Xu 2017, die geraden unter 140 aus Behrens u. a. 2020). Von den 133 Dimensionen von 7 bis 139, die nur im zweiten Bereich liegen, haben 3 (12, 56, 61) eine eindeutige Struktur, ein Anteil von **0.022556** (Abschnitt 4).

Viertens, Bernoulli-Zahlen allein entscheiden 34 der 130 Dimensionen mit exotischen Sphären —die Ordnung von bP aus Bernoulli-Zahlen zu berechnen ergibt 28, 992, 8128, 261632, in Übereinstimmung mit der übertragenen Tabelle (die Bernoulli-Zahlen aus der Zeta-Funktion stimmen bis auf einen relativen Unterschied von 4.290×10^{-14} überein). Die 34 Dimensionen von 7 bis 139, die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen, haben alle eine Ordnung von mindestens 28 und daher exotische Sphären, ein Anteil von **0.261538** (Abschnitt 4).

Fünftens, der Faktor in der Ordnung von bP hat die Gestalt einer vollkommenen Zahl —die Ordnung selbst ist nur für 28 und 8128 eine vollkommene Zahl ($k = 2$ bis 35); 992 ist genau das Doppelte der vollkommenen Zahl 496 und abundant mit dem Verhältnis der Teilersumme **2.032258**. Gezählt wird nur die gemeinsame Gestalt, ein Grund wird nicht angegeben (Abschnitt 5).

Sechstens, der Separator ist, ob die Dimension höchstens 6 oder mindestens 5 ist——5 und 6, in beiden, sind glatt entschieden; 4, nur höchstens 6, ist PL wie glatt offen; bei 7 und darüber, nur mindestens 5, entscheidet die Ordnung der Gruppe der exotischen Sphären die glatte Antwort (Abschnitt 6).

Schlüsselwörter: Poincaré-Vermutung, exotische Sphäre, h-Kobordismus-Satz, stückweise lineare Mannigfaltigkeit, glatte Struktur, Bernoulli-Zahl.

Tragweite (scope note): Es wird kein neuer Satz beansprucht——die topologischen und PL-Lösungen der verallgemeinerten Poincaré-Vermutung (Smale 1961, Stallings 1960, Zeeman 1962, Newman 1966, Freedman 1982, Perelman), Milnors (1956) exotische 7-Sphäre, die Gruppe Θ von Kervaire und Milnor (1963) und die Formel für die Ordnung von bP , die Übereinstimmung von PL- und glatten Strukturen in Dimensionen höchstens 6 (Ergebnisse gesammelt in Kirby und Siebenmann 1977), die Übereinstimmung der drei Kategorien in Dimension 3 (Moise 1952), die Existenz topologischer 4-Mannigfaltigkeiten ohne PL-Struktur (Freedman 1982) sowie die Listen von Wang und Xu (2017) und Behrens u. a. (2020) sind alle bekannt. Keine Zelle wird gelöst——zur PL- oder glatten Poincaré-Vermutung in Dimension 4 wird nichts hinzugefügt. Übertragene Tatsachen werden nicht als berechnet beansprucht——die Listen der Sätze und die Tabelle der Ordnungen von Θ für n höchstens 20 sind übertragen; berechnet wurden die Bernoulli-Zahlen, die Ordnungen von bP , Zählungen von Mengen von Dimensionen und Teilersummen. Der Wert von Θ in Dimension 4 wird nicht verwendet——in den Dimensionen 5 und darüber ist es der h -Kobordismus-Satz, der ein triviales Θ mit einer eindeutigen glatten Struktur auf der Sphäre gleichsetzt, und die Dimension 4 liegt außerhalb seines Bereichs. Gerade Dimensionen ab 140 werden nicht gezählt——sie liegen außerhalb der beiden zitierten Ergebnisse, und dieser Aufsatz sagt nicht, was dort erreicht ist. Für die gemeinsame Gestalt mit vollkommenen Zahlen wird kein Grund angegeben——gezählt werden nur die gemeinsame Gestalt und die Werte von k , für die die Ordnung selbst eine vollkommene Zahl ist. Beziehung zu früheren Aufsätzen: die Tragweite von Aufsatz 08 sagte, dass die glatte 4-dimensionale Poincaré-Vermutung noch offen ist, und die Tragweite von Aufsatz 114 sagte, dass sie sie nicht berührt; dieser Aufsatz wird neben sie gestellt und zählt, wo diese Zelle in der Tabelle der drei Kategorien und Dimensionen sitzt (kein früherer Inhaber). Aufsatz 07 brachte die topologische Lösung der Poincaré-Vermutung in eine Tabelle nach Dimensionen (2 klassisch, 3 Perelman, 4 Freedman, 5 und darüber Smale)——hier werden denselben Spalten zwei Zeilen für PL und glatt hinzugefügt. Aufsatz 105 stellte fest, dass $\mathbb{R}^n$ nur für $n = 4$ mehr als eine glatte Struktur hat——hier wird gezählt, dass für die Sphäre S^n die Dimension 4 offen bleibt, während 130 der Dimensionen von 1 bis 139 mehr als eine glatte Struktur haben. Aufsatz 810 zählte die vollkommenen Zahlen bis 10^6 als die 4 Zahlen 6, 28, 496, 8128——hier wird gezählt, dass die Ordnung von bP unter ihnen mit 28 und 8128 zusammenfällt und dass die Gestalt von 6 nie erscheint. Hinzugefügt wird, die Tabelle der drei Kategorien und Dimensionen durch die Überlappung des Bereichs, in dem PL und glatt übereinstimmen, mit dem Bereich des h -Kobordismus-Satzes in drei Bänder zu teilen, zu zeigen, dass die Dimensionen 5 und 6 in der Überlappung liegen und glatt entschieden sind, während die Dimension 4 nur in einem Bereich liegt, die Ordnungen von bP aus Bernoulli-Zahlen zu berechnen und mit der übertragenen Tabelle abzugleichen, die glatte Zeile für die Dimensionen 1 bis 139 zu zählen und 34 Dimensionen zu finden, die allein durch Bernoulli-Zahlen entschieden sind, und die Werte von k zu zählen, für die die Ordnung von bP selbst eine vollkommene Zahl ist.

1. Bezeichnungen und Frage

Aufbau: eine geschlossene n -Mannigfaltigkeit, die zur n -Sphäre S^n homotopieäquivalent ist, heißt Homotopie- n -Sphäre. Je nachdem, ob „dasselbe wie die Sphäre“ als homöomorph (die topologische Kategorie TOP), stückweise

linear homöomorph (PL) oder diffeomorph (DIFF) gelesen wird, wird die Poincaré-Vermutung zu drei Fragen. Kervaire und Milnor führten die Gruppe Θ_n der h-Kobordismusklassen orientierter Homotopie- n -Sphären und ihre Untergruppe bP_{n+1} derer ein, die parallelisierbare Mannigfaltigkeiten beranden, und zeigten für $k \geq 2$:

$$|bP_{4k}| = 2^{2k-2} (2^{2k-1} - 1) \cdot \text{num}(4B_{2k}/k)$$

Hier ist B_{2k} eine Bernoulli-Zahl und num der Zähler des gekürzten Bruchs. In den Dimensionen 5 und darüber setzt der h-Kobordismus-Satz ein triviales Θ_n mit einer eindeutigen glatten Struktur auf S^n gleich.

Frage: welche Zelle in der Tabelle mit den Dimensionen als Spalten und den drei Kategorien als Zeilen ist sowohl PL als auch glatt offen, und wie unterscheidet sie sich von den anderen Zellen?

2. Die drei Zeilen

Rechnung 2.1: die übertragenen Lösungen wurden für die Dimensionen 1 bis 8 in eine Tabelle gebracht (wahr heißt, die Vermutung gilt, falsch heißt, sie scheitert).

n	TOP	PL	DIFF	entscheidende Ergebnisse
1	wahr	wahr	wahr	klassisch
2	wahr	wahr	wahr	klassisch
3	wahr	wahr	wahr	Perelman (topologisch), Moise (drei Kategorien stimmen überein)
4	wahr	offen	offen	Freedman (topologisch)
5	wahr	wahr	wahr	Smale, Zeeman, Newman
6	wahr	wahr	wahr	Smale, Zeeman, Newman
7	wahr	wahr	falsch	Milnor, Kervaire und Milnor
8	wahr	wahr	falsch	Kervaire und Milnor

Beobachtung 2.2: die topologische Zeile gilt in jeder Dimension, und die einzige offene Zelle der PL-Zeile ist die Dimension 4.Unter den Dimensionen 1 bis 8 ist nur $n = 4$ sowohl PL als auch glatt offen, und die Dimensionen, in denen die topologische und die glatte Antwort beide entschieden sind, sich aber unterscheiden, sind $n = 7$ und 8—— in Dimension 4 liefern PL und glatt dieselben Strukturen, also sind die beiden offenen Zellen eine Frage.

3. Die Überlappung zweier Bereiche

Rechnung 3.1: nimmt man A als die Dimensionen, in denen PL und glatt dieselben Strukturen liefern ($n \leq 6$), und B als den Bereich des h-Kobordismus-Satzes ($n \geq 5$), so wurden die Dimensionen 1 bis 139 in drei Bänder geteilt.

Band	Dimensionen	Anzahl	glatte Zeile
A und B	5, 6	2	wahr (auch in den übertragenen Listen)
nur A	1, 2, 3, 4	4	1 bis 3 wahr, 4 offen
nur B	7 bis 139	133	wahr für die 3 Dimensionen 12, 56, 61

Beobachtung 3.2: das ist der Kern. Die Dimensionen 5 und 6 liegen in der Überlappung der beiden Bereiche und sind sogar glatt entschieden, während die Dimension 4 nur in A liegt und sowohl PL als auch glatt offen bleibt. In den Dimensionen 5 und 6 lässt der h-Kobordismus-Satz die PL-Vermutung gelten, und da PL und glatt dieselben Strukturen liefern, gilt auch die glatte Vermutung. Auch die beiden übertragenen Listen von Sätzen enthielten 5 und 6 — auch die Dimensionen 1, 2, 3 liegen nur in A, doch dort fallen topologisch, PL und glatt in eins zusammen, und die topologische Antwort wird zur Antwort aller drei Zeilen. In Dimension 4 gibt es topologische Mannigfaltigkeiten ohne PL-Struktur, also fallen topologisch und PL nicht zusammen, und nur die topologische Zeile ist geschlossen.

4. Die glatte Zeile zählen

Rechnung 4.1: Bernoulli-Zahlen wurden als exakte Brüche aus der Rekursion gebaut ($B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_{12} = -691/2730$), für $k = 1$ bis 35 mit Werten aus der Zeta-Funktion bis auf einen relativen Unterschied von 4.290×10^{-14} abgeglichen, und dann wurde $|bP_{4k}|$ gezählt.

k	$n = 4k - 1$	$2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$	Zähler	$ bP_{4k} $	übertragenes $ \Theta_n $	Quotient
2	7	28	1	28	28	1
3	11	496	2	992	992	1
4	15	8128	1	8128	16256	2
5	19	130816	2	261632	523264	2
6	23	2096128	691	1448424448	außerhalb der Tabelle	außerhalb der Tabelle

Rechnung 4.2: die glatte Zeile für die Dimensionen 1 bis 139 wurde mit den übertragenen Listen gezählt (ungerade Dimensionen aus Wang und Xu 2017, gerade Dimensionen unter 140 aus Behrens u. a. 2020).

Klasse	Anzahl der Dimensionen	welche
eindeutige glatte Struktur	8	1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61
offen	1	4
exotische Sphären existieren	130	einschließlich der 34 mit Rest 3 bei Division durch 4

Beobachtung 4.3: in der glatten Zeile entscheiden Bernoulli-Zahlen allein 34 der 130 Dimensionen mit exotischen Sphären.Die 34 Dimensionen von 7 bis 139 mit Rest 3 bei Division durch 4 haben alle $|bP_{4k}|$ von mindestens 28 und daher exotische Sphären, ein Anteil von **0.261538**. Im Band nur B haben 3 von 133 Dimensionen eine eindeutige glatte Struktur, ein Anteil von **0.022556**——die übrigen 96 Dimensionen werden außerhalb der Formel für die Ordnung von bP entschieden, und dieser Aufsatz berechnet sie nicht. Die übertragenen Listen enthalten keine der 34 Dimensionen und widersprechen der Rechnung nicht.

5. Die Gestalt der Zählung

Rechnung 5.1: der Faktor $2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$ in der Ordnung von bP wurde als $2^{p-1}(2^p - 1)$ mit $p = 2k - 1$ geschrieben, und es wurde geprüft, ob $2^p - 1$ prim ist (der Lucas–Lehmer-Test) und ob die Teilersumme σ gleich $2n$ ist.

k	p	$2^p - 1$	$2^{p-1}(2^p - 1)$	Zähler	$ bP_{4k} $
2	3	7 (prim)	28 (vollkommen)	1	28
3	5	31 (prim)	496 (vollkommen)	2	992
4	7	127 (prim)	8128 (vollkommen)	1	8128
5	9	$511 = 7 \times 73$	130816	2	261632
7	13	8191 (prim)	33550336 (vollkommen)	2	67100672

Beobachtung 5.2: der Faktor in der Ordnung von bP hat die Gestalt einer vollkommenen Zahl, und die Ordnung selbst war nur für 28 und 8128 eine vollkommene Zahl. Für $k = 2$ bis 35 gibt es 8 Werte von k , für die $2^{2k-1} - 1$ prim ist, aber der Zähler ist gleich 1 nur für $k = 2$ und 4; die 992 bei $k = 3$ ist genau 2-mal 496, mit $\sigma(992) = 2016$, eine abundante Zahl mit dem Verhältnis **2.032258**—da $p = 2k - 1$ stets ungerade ist, erscheint die Gestalt der vollkommenen Zahl 6 ($p = 2$) nie. Gezählt wurde nur die gemeinsame Gestalt; ein Grund, der exotische Sphären und vollkommene Zahlen verbindet, wird nicht beansprucht.

6. Der Separator und was nicht gesagt wird

Beobachtung 6.1: der Separator ist, ob die Dimension höchstens 6 oder mindestens 5 ist. 5 und 6, in beiden Bereichen, sind glatt entschieden; 4, nur höchstens 6, ist PL wie glatt offen; bei 7 und darüber, nur mindestens 5, entscheidet die Ordnung von Θ_n die glatte Antwort—unter den Dimensionen, die nur bei höchstens 6 liegen, sind 1, 2, 3 geschlossen, weil die drei Kategorien in eine zusammenfallen, und nur 4 ist offen.

Beobachtung 6.2: was nicht gesagt wird. Zur PL- oder glatten Poincaré-Vermutung in Dimension 4 wird nichts hinzugefügt. Der Wert von Θ in Dimension 4 wird nicht verwendet, weil sie außerhalb des Bereichs des h-Kobordismus-Satzes liegt, der ein triviales Θ mit einer eindeutigen glatten Struktur gleichsetzt—was in geraden Dimensionen ab 140 erreicht ist, wird nicht gesagt, da es außerhalb der beiden zitierten Ergebnisse liegt. Für die gemeinsame Gestalt mit vollkommenen Zahlen wird kein Grund angegeben.

7. Zählung und Schluss

1. die topologische Zeile wahr in jeder Dimension, die einzige offene PL-Zelle bei $n = 4$ (Rechnung 2.1): in Dimension 4 sind PL und glatt eine Frage.
2. die Überlappung A und B sind die 2 Dimensionen 5, 6 (Rechnung 3.1): der Kern; glatt entschieden.
3. das Band nur A sind 1, 2, 3, 4 (Beobachtung 3.2): 1 bis 3 fallen zusammen und schließen sich; nur 4 ist offen.
4. $|bP_{4k}|$ ist 28, 992, 8128, 261632 (Rechnung 4.1): in Übereinstimmung mit der übertragenen Tabelle, Quotienten 1, 1, 2, 2.
5. Dimensionen 1 bis 139: eindeutig 8, offen 1, exotisch 130 (Rechnung 4.2): ungerade aus Wang und Xu, gerade aus Behrens u. a.
6. 34 Dimensionen allein durch Bernoulli-Zahlen entschieden (**0.261538**) (Beobachtung 4.3): Rest 3 bei Division durch 4.
7. 3 eindeutige Dimensionen im Band nur B (**0.022556**) (Beobachtung 4.3): 12, 56, 61.
8. die Ordnung ist selbst nur für 28 und 8128 vollkommen (Beobachtung 5.2): 992 ist abundant mit dem Verhältnis **2.032258**.

9. ob die Dimension höchstens 6 oder mindestens 5 ist (Beobachtung 6.1): der Separator; Aufsätze 08, 114, 07, 105, 810.

Schluss: Die Poincaré-Vermutung ist in jeder Kategorie eine andere Frage, und nur die Dimension vier bleibt sowohl PL als auch glatt offen. Die topologische Zeile ist in jeder Dimension geschlossen, die PL-Zeile ist nur in Dimension 4 offen, und in Dimension 4 werden PL und glatt dieselbe Frage——die Dimensionen höchstens 6, wo PL und glatt übereinstimmen, und die Dimensionen mindestens 5, der Bereich des h-Kobordismus-Satzes, überlappen sich in den 2 Dimensionen 5 und 6, die glatt entschieden sind. Von 1, 2, 3, 4, die nur bei höchstens 6 liegen, schließen sich 1 bis 3, weil die drei Kategorien zusammenfallen, und nur 4 bleibt offen. Die glatte Zeile für die Dimensionen 1 bis 139 ist eindeutig 8, offen 1, exotisch 130; die allein aus Bernoulli-Zahlen berechneten Ordnungen von bP entscheiden 34 Dimensionen (0.261538) und stimmen mit der übertragenen Tabelle überein——die Ordnung ist selbst nur für 28 und 8128 eine vollkommene Zahl, und für die gemeinsame Gestalt wird kein Grund angegeben. Der Separator ist, ob die Dimension höchstens 6 oder mindestens 5 ist. Unter die früheren Aufsätze gestellt——Aufsatz 07 brachte die topologische Lösung in eine Tabelle nach Dimensionen, Aufsatz 105 stellte fest, dass $\mathbb{R}^n$ nur in Dimension 4 mehr als eine glatte Struktur hat, und Aufsatz 810 zählte 4 vollkommene Zahlen bis 10^6 . Hier wurde die glatte Zelle in Dimension 4, von der Aufsatz 08 und Aufsatz 114 schrieben, dass sie offen ist, in die Tabelle der drei Kategorien und Dimensionen gestellt, und ihr Unterschied zu den benachbarten Dimensionen 5 und 6 wurde gezählt. Offen gesagt——keine Zelle wurde gelöst, und die Listen der Sätze und die Tabelle für n höchstens 20 sind übertragen. Was in geraden Dimensionen ab 140 erreicht ist, und der Wert von Θ in Dimension 4, werden nicht gesagt.

Literatur

1. Behrens, M., Hill, M., Hopkins, M. J., & Mahowald, M. (2020). Detecting exotic spheres in low dimensions using coker J. *Journal of the London Mathematical Society*.
2. Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*.
3. Kervaire, M. A., & Milnor, J. W. (1963). Groups of homotopy spheres: I. *Annals of Mathematics*.
4. Kirby, R. C., & Siebenmann, L. C. (1977). *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*. Princeton University Press.
5. Milnor, J. (1956). On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*.
6. Moise, E. E. (1952). Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Annals of Mathematics*.
7. Newman, M. H. A. (1966). The engulfing theorem for topological manifolds. *Annals of Mathematics*.
8. Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv*.
9. Perelman, G. (2003). Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv*.
10. Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*.
11. Stallings, J. (1960). Polyhedral homotopy-spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society*.

12. Wang, G., & Xu, Z. (2017). The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. *Annals of Mathematics*.
13. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Interpretation of the 3D Poincaré Conjecture via the $n=2$ Uniqueness Theorem and Perelman's Ricci Flow* [Aufsatz 07]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404387
14. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Interpretation of the 4D Poincaré Conjecture and Exotic Structures via the $n=3$ Uniqueness Theorem and Hopf Fibration* [Aufsatz 08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Exception Only in Four Dimensions* [Aufsatz 105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
16. Yamagishi, Y. (2026). *Which Objects Know They Are in Four Dimensions?* [Aufsatz 114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
17. Yamagishi, Y. (2026). *Only Four Numbers Sit Exactly on the Equality Below a Million, While the Inequality Just Above It Takes a Quarter* [Aufsatz 810]. Zenodo.
18. Zeeman, E. C. (1962). The Poincaré conjecture for n greater than or equal to 5. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*. Prentice-Hall.

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)