

La conjecture de Poincaré est une question différente dans chaque catégorie, et seule la dimension quatre reste ouverte à la fois en PL et en lisse

— les dimensions 5 et 6 se trouvent là où le domaine où PL et lisse s'accordent recouvre le domaine du théorème du h-cobordisme, et sont donc tranchées même en lisse, tandis que la dimension 4 ne se trouve que dans le premier — le séparateur est de savoir si la dimension est au plus 6 ou au moins 5 — [Article 1003]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

La conjecture de Poincaré demande si une variété fermée homotopiquement équivalente à la n -sphère est la sphère, mais elle devient trois questions différentes selon que « être la même que la sphère » est lu dans la catégorie topologique (TOP), linéaire par morceaux (PL) ou lisse (DIFF). Cet article construit un tableau ayant les dimensions pour colonnes et les trois catégories pour lignes, et en compte les cases à l'aide de théorèmes transcrits et de nombres calculés à partir des nombres de Bernoulli. Aucun théorème nouveau n'est revendiqué et aucune case n'est résolue.

Premièrement, la ligne topologique vaut en toute dimension, et la seule case ouverte de la ligne PL est la dimension 4 — les dimensions 1 et 2 sont classiques, 3 est Perelman, 4 est Freedman (1982), et 5 et au-delà sont Smale (1961) et Newman (1966). Parmi les dimensions 1 à 8, la seule ouverte à la fois en PL et en lisse est la dimension 4 (Section 2).

Deuxièmement, et c'est le cœur. Les dimensions 5 et 6 se trouvent dans le recouvrement de deux domaines et sont tranchées même en lisse, tandis que la dimension 4 ne se trouve que dans un seul — le domaine où PL et lisse donnent les mêmes structures (dimension au plus 6) et le domaine du théorème du h -cobordisme (dimension au moins 5) se recouvrent dans les 2 dimensions 5 et 6, où la conjecture PL entraîne la conjecture lisse. Seules dans le premier domaine se trouvent les 4 dimensions 1, 2, 3, 4 ; en 1 à 3 les trois catégories se replient en une seule et la question est close, et seule 4 reste ouverte à la fois en PL et en lisse (Section 3).

Troisièmement, la ligne lisse pour les dimensions 1 à 139 compte 8 dimensions à structure unique, 1 ouverte et 130 avec des sphères exotiques — les dimensions à structure lisse unique sont 1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61 (transcrit : les impaires d'après Wang et Xu 2017, les paires sous 140 d'après Behrens et al. 2020). Des 133 dimensions de 7 à 139 situées seulement dans le second domaine, 3 (12, 56, 61) ont une structure unique, une proportion de **0.022556** (Section 4).

Quatrièmement, les nombres de Bernoulli seuls tranchent 34 des 130 dimensions à sphères exotiques — calculer l'ordre de bP à partir des nombres de Bernoulli donne 28, 992, 8128, 261632, en accord avec le tableau transcrit (les nombres de Bernoulli issus de la fonction zêta concordent à une différence relative de 4.290×10^{-14} près). Les 34 dimensions de 7 à 139 qui laissent le reste 3 dans la division par 4 ont toutes un ordre d'au moins 28 et donc des sphères exotiques, une proportion de **0.261538** (Section 4).

Cinquièmement, le facteur de l'ordre de bP a la forme d'un nombre parfait — l'ordre lui-même n'est un nombre parfait que pour 28 et 8128 ($k = 2$ à 35) ; 992 est exactement le double du nombre parfait 496 et est abondant, avec un rapport de la somme des diviseurs de **2.032258**. Seule la forme commune est comptée, et aucune raison n'est donnée (Section 5).

Sixièmement, le séparateur est de savoir si la dimension est au plus 6 ou au moins 5 — 5 et 6, dans les deux, sont tranchées en lisse ; 4, seulement au plus 6, est ouverte en PL comme en lisse ; pour 7 et au-delà, seulement au moins 5, c'est l'ordre du groupe des sphères exotiques qui décide la réponse lisse (Section 6).

Mots-clés : conjecture de Poincaré, sphère exotique, théorème du h-cobordisme, variété linéaire par morceaux, structure lisse, nombre de Bernoulli.

Portée (scope note) : Aucun théorème nouveau n'est revendiqué—les résolutions topologique et PL de la conjecture de Poincaré généralisée (Smale 1961, Stallings 1960, Zeeman 1962, Newman 1966, Freedman 1982, Perelman), la 7-sphère exotique de Milnor (1956), le groupe Θ de Kervaire et Milnor (1963) et la formule de l'ordre de bP, l'accord des structures PL et lisses en dimension au plus 6 (résultats rassemblés dans Kirby et Siebenmann 1977), l'accord des trois catégories en dimension 3 (Moise 1952), l'existence de 4-variétés topologiques sans structure PL (Freedman 1982), et les listes de Wang et Xu (2017) et de Behrens et al. (2020) sont toutes connues. Aucune case n'est résolue—rien n'est ajouté à la conjecture de Poincaré PL ou lisse en dimension 4. Les faits transcrits ne sont pas revendiqués comme calculés—les listes de théorèmes et le tableau des ordres de Θ pour n au plus 20 sont transcrits ; ce qui a été calculé, ce sont les nombres de Bernoulli, les ordres de bP, des dénombrements d'ensembles de dimensions et des sommes de diviseurs. La valeur de Θ en dimension 4 n'est pas utilisée—en dimension 5 et au-delà, c'est le théorème du h-cobordisme qui rend un Θ trivial équivalent à une structure lisse unique sur la sphère, et la dimension 4 est hors de son domaine. Les dimensions paires à partir de 140 ne sont pas comptées—elles sont hors des deux résultats cités, et cet article ne dit pas ce qui y a été atteint. Aucune raison n'est donnée pour la forme commune avec les nombres parfaits—seules la forme commune et les valeurs de k pour lesquelles l'ordre lui-même est un nombre parfait sont comptées. Relation avec les articles précédents : la portée de l'Article 08 disait que la conjecture de Poincaré lisse en dimension 4 est encore ouverte, et la portée de l'Article 114 disait qu'il n'y touche pas ; cet article est placé à côté d'eux et compte où cette case se situe dans le tableau des trois catégories et des dimensions (pas d'occupant antérieur). L'Article 07 a mis la résolution topologique de la conjecture de Poincaré dans un tableau par dimension (2 classique, 3 Perelman, 4 Freedman, 5 et au-delà Smale)—ici, deux lignes pour PL et lisse sont ajoutées aux mêmes colonnes. L'Article 105 a établi que $\mathbb{R}^n$ n'a plus d'une structure lisse que pour $n = 4$ —ici on compte que pour la sphère S^n , la dimension 4 reste ouverte tandis que 130 des dimensions de 1 à 139 ont plus d'une structure lisse. L'Article 810 a compté les nombres parfaits jusqu'à 10^6 comme les 4 nombres 6, 28, 496, 8128—ici on compte que l'ordre de bP coïncide avec 28 et 8128 parmi eux, et que la forme de 6 n'apparaît jamais. Ce qui est ajouté, c'est découper le tableau des trois catégories et des dimensions en trois bandes par le recouvrement du domaine où PL et lisse s'accordent et du domaine du théorème du h-cobordisme, montrer que les dimensions 5 et 6 se trouvent dans le recouvrement et sont tranchées en lisse, tandis que la dimension 4 ne se trouve que dans un domaine, calculer les ordres de bP à partir des nombres de Bernoulli et les confronter au tableau transcrit, compter la ligne lisse pour les dimensions 1 à 139 et trouver 34 dimensions tranchées par les seuls nombres de Bernoulli, et compter les valeurs de k pour lesquelles l'ordre de bP est lui-même un nombre parfait.

1. Notations et question

Dispositif : une n -variété fermée homotopiquement équivalente à la n -sphère S^n est appelée une n -sphère d’homotopie. Selon que « être la même que la sphère » est lu comme homéomorphe (la catégorie topologique TOP), homéomorphe linéairement par morceaux (PL) ou difféomorphe (DIFF), la conjecture de Poincaré devient trois questions. Kervaire et Milnor ont introduit le groupe Θ_n des classes de h-cobordisme de n -sphères d’homotopie orientées et son sous-groupe bP_{n+1} formé de celles qui bordent des variétés parallélisables, et ont montré pour $k \geq 2$:

$$|bP_{4k}| = 2^{2k-2} (2^{2k-1} - 1) \cdot \text{num}(4B_{2k}/k)$$

Ici B_{2k} est un nombre de Bernoulli et num le numérateur de la fraction réduite. En dimension 5 et au-delà, le théorème du h-cobordisme rend un Θ_n trivial équivalent à une structure lisse unique sur S^n .

Question : dans le tableau ayant les dimensions pour colonnes et les trois catégories pour lignes, quelle case est ouverte à la fois en PL et en lisse, et en quoi diffère-t-elle des autres cases ?

2. Les trois lignes

Calcul 2.1 : les résolutions transcrites ont été mises dans un tableau pour les dimensions 1 à 8 (vrai signifie que la conjecture vaut, faux qu’elle échoue).

n	TOP	PL	DIFF	résultats décisifs
1	vrai	vrai	vrai	classique
2	vrai	vrai	vrai	classique
3	vrai	vrai	vrai	Perelman (topologique), Moise (les trois catégories s’accordent)
4	vrai	ouvert	ouvert	Freedman (topologique)
5	vrai	vrai	vrai	Smale, Zeeman, Newman
6	vrai	vrai	vrai	Smale, Zeeman, Newman
7	vrai	vrai	faux	Milnor, Kervaire et Milnor
8	vrai	vrai	faux	Kervaire et Milnor

Observation 2.2 : la ligne topologique vaut en toute dimension, et la seule case ouverte de la ligne PL est la dimension 4. Parmi les dimensions 1 à 8, seule $n = 4$ est ouverte à la fois en PL et en lisse, et les dimensions où les réponses topologique et lisse sont toutes deux tranchées mais diffèrent sont $n = 7$ et 8 ——en dimension 4, PL et lisse donnent les mêmes structures, de sorte que les deux cases ouvertes sont une seule question.

3. Le recouvrement de deux domaines

Calcul 3.1 : en prenant pour A les dimensions où PL et lisse donnent les mêmes structures ($n \leq 6$) et pour B le domaine du théorème du h-cobordisme ($n \geq 5$), les dimensions 1 à 139 ont été découpées en trois bandes.

bande	dimensions	nombre	ligne lisse
A et B	5, 6	2	vrai (aussi dans les listes transcrites)
A seul	1, 2, 3, 4	4	1 à 3 vrai, 4 ouvert
B seul	7 à 139	133	vrai pour les 3 dimensions 12, 56, 61

Observation 3.2 : c’est le cœur. Les dimensions 5 et 6 se trouvent dans le recouvrement des deux domaines et sont tranchées même en lisse, tandis que la dimension 4 ne se trouve que dans A et reste ouverte à la fois en PL et en lisse. En dimensions 5 et 6, le théorème du h-cobordisme fait valoir la conjecture PL, et puisque PL et lisse donnent les mêmes structures, la conjecture lisse vaut aussi. Les deux listes transcrites de théorèmes contenaient aussi 5 et 6——les dimensions 1, 2, 3 ne se trouvent elles aussi que dans A, mais là topologique, PL et lisse se replient en une seule, et la réponse topologique devient la réponse des trois lignes. En dimension 4 il existe des variétés topologiques sans structure PL, donc topologique et PL ne se replient pas ensemble, et seule la ligne topologique est close.

4. Compter la ligne lisse

Calcul 4.1 : les nombres de Bernoulli ont été construits comme fractions exactes à partir de la récurrence ($B_4 = -1/30, B_6 = 1/42, B_{12} = -691/2730$), confrontés aux valeurs issues de la fonction zêta pour $k = 1$ à 35 à une différence relative de 4.290×10^{-14} près, puis $|bP_{4k}|$ a été compté.

k	$n = 4k - 1$	$2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$	numérateur	$ bP_{4k} $	$ \Theta_n $ transcrit	quotient
2	7	28	1	28	28	1
3	11	496	2	992	992	1
4	15	8128	1	8128	16256	2
5	19	130816	2	261632	523264	2
6	23	2096128	691	1448424448	hors du tableau	hors du tableau

Calcul 4.2 : la ligne lisse pour les dimensions 1 à 139 a été comptée avec les listes transcrites (dimensions impaires d’après Wang et Xu 2017, dimensions paires sous 140 d’après Behrens et al. 2020).

classe	nombre de dimensions	lesquelles
structure lisse unique	8	1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61
ouvert	1	4
des sphères exotiques existent	130	y compris les 34 de reste 3 dans la division par 4

Observation 4.3 : dans la ligne lisse, les nombres de Bernoulli seuls tranchent 34 des 130 dimensions à sphères exotiques. Les 34 dimensions de 7 à 139 de reste 3 dans la division par 4 ont toutes $|bP_{4k}|$ d’au moins 28 et donc des sphères exotiques, une proportion de **0.261538**. Dans la bande B seul, 3 dimensions sur 133 ont une structure lisse unique, une proportion de **0.022556**—les 96 dimensions restantes sont tranchées hors de la formule de l’ordre de bP , et cet article ne les calcule pas. Les listes transcrites ne contiennent aucune des 34 dimensions et ne contredisent pas le calcul.

5. La forme du compte

Calcul 5.1 : le facteur $2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$ de l’ordre de bP a été écrit $2^{p-1}(2^p - 1)$ avec $p = 2k - 1$, et l’on a vérifié si $2^p - 1$ est premier (le test de Lucas–Lehmer) et si la somme des diviseurs σ vaut $2n$.

k	p	$2^p - 1$	$2^{p-1}(2^p - 1)$	numérateur	$ bP_{4k} $
2	3	7 (premier)	28 (parfait)	1	28
3	5	31 (premier)	496 (parfait)	2	992
4	7	127 (premier)	8128 (parfait)	1	8128
5	9	$511 = 7 \times 73$	130816	2	261632
7	13	8191 (premier)	33550336 (parfait)	2	67100672

Observation 5.2 : le facteur de l'ordre de bP a la forme d'un nombre parfait, et l'ordre lui-même n'était un nombre parfait que pour 28 et 8128. Pour $k = 2$ à 35 il y a 8 valeurs de k pour lesquelles $2^{2k-1} - 1$ est premier, mais le numérateur vaut 1 seulement pour $k = 2$ et 4 ; le 992 en $k = 3$ vaut exactement 2 fois 496, avec $\sigma(992) = 2016$, un nombre abondant de rapport **2.032258**——comme $p = 2k - 1$ est toujours impair, la forme du nombre parfait 6 ($p = 2$) n'apparaît jamais. Seule la forme commune a été comptée ; aucune raison liant sphères exotiques et nombres parfaits n'est revendiquée.

6. Le séparateur et ce qui n'est pas dit

Observation 6.1 : le séparateur est de savoir si la dimension est au plus 6 ou au moins 5.5 et 6, dans les deux domaines, sont tranchées en lisse ; 4, seulement au plus 6, est ouverte en PL comme en lisse ; pour 7 et au-delà, seulement au moins 5, c'est l'ordre de Θ_n qui décide la réponse lisse——parmi les dimensions situées seulement au plus 6, 1, 2, 3 sont closes parce que les trois catégories se replient en une seule, et seule 4 est ouverte.

Observation 6.2 : ce qui n'est pas dit. Rien n'est ajouté à la conjecture de Poincaré PL ou lisse en dimension 4. La valeur de Θ en dimension 4 n'est pas utilisée, parce que celle-ci est hors du domaine du théorème du h-cobordisme qui rend un Θ trivial équivalent à une structure lisse unique——ce qui a été atteint en dimensions paires à partir de 140 n'est pas dit, car cela est hors des deux résultats cités. Aucune raison n'est donnée pour la forme commune avec les nombres parfaits.

7. Recensement et conclusion

- la ligne topologique vraie en toute dimension, la seule case PL ouverte en $n = 4$ (Calcul 2.1) : en dimension 4, PL et lisse sont une seule question.
- le recouvrement A et B, ce sont les 2 dimensions 5, 6 (Calcul 3.1) : le cœur ; tranchées en lisse.

3. la bande A seul, ce sont **1, 2, 3, 4** (Observation 3.2) : **1 à 3 se replient et se ferment ; seule 4 est ouverte.**
4. $|bP_{4k}|$ vaut **28, 992, 8128, 261632** (Calcul 4.1) : **en accord avec le tableau transcrit, quotients 1, 1, 2, 2.**
5. dimensions 1 à 139 : unique **8**, ouvert **1**, exotique **130** (Calcul 4.2) : **impaires d'après Wang et Xu, paires d'après Behrens et al.**
6. **34 dimensions tranchées par les seuls nombres de Bernoulli (0.261538)** (Observation 4.3) : **reste 3 dans la division par 4.**
7. **3 dimensions uniques dans la bande B seul (0.022556)** (Observation 4.3) : **12, 56, 61.**
8. l'ordre n'est lui-même parfait que pour **28 et 8128** (Observation 5.2) : **992 est abondant de rapport 2.032258.**
9. si la dimension est au plus 6 ou au moins 5 (Observation 6.1) : **le séparateur ; Articles 08, 114, 07, 105, 810.**

Conclusion : La conjecture de Poincaré est une question différente dans chaque catégorie, et seule la dimension quatre reste ouverte à la fois en PL et en lisse. La ligne topologique est close en toute dimension, la ligne PL n'est ouverte qu'en dimension 4, et en dimension 4 PL et lisse deviennent la même question—les dimensions au plus 6, où PL et lisse s'accordent, et les dimensions au moins 5, domaine du théorème du h-cobordisme, se recouvrent dans les 2 dimensions 5 et 6, qui sont tranchées en lisse. De 1, 2, 3, 4, situées seulement au plus 6, 1 à 3 se ferment parce que les trois catégories se replient, et seule 4 reste ouverte. La ligne lisse pour les dimensions 1 à 139 est unique 8, ouvert 1, exotique 130 ; les ordres de bP calculés à partir des seuls nombres de Bernoulli tranchent 34 dimensions (0.261538) et concordent avec le tableau transcrit—l'ordre n'est lui-même un nombre parfait que pour 28 et 8128, et aucune raison n'est donnée pour la forme commune. Le séparateur est de savoir si la dimension est au plus 6 ou au moins 5. Situé parmi les articles précédents—l'Article 07 a mis la résolution topologique dans un tableau par dimension, l'Article 105 a établi que $\mathbb{R}^n$ n'a plus d'une structure lisse qu'en dimension 4, et l'Article 810 a compté 4 nombres parfaits jusqu'à 10^6 . Ici, la case lisse en dimension 4, que l'Article 08 et l'Article 114 disaient ouverte, a été placée dans le tableau des trois catégories et des dimensions, et sa différence avec les dimensions voisines 5 et 6 a été comptée. Pour être honnête—aucune case n'a été résolue, et les listes de théorèmes et le tableau pour n au plus 20 sont transcrits. Ce qui a été atteint en dimensions paires à partir de 140, et la valeur de Θ en dimension 4, ne sont pas dits.

Références

-
1. Behrens, M., Hill, M., Hopkins, M. J., & Mahowald, M. (2020). Detecting exotic spheres in low dimensions using coker J. *Journal of the London Mathematical Society*.
 2. Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*.
 3. Kervaire, M. A., & Milnor, J. W. (1963). Groups of homotopy spheres: I. *Annals of Mathematics*.
 4. Kirby, R. C., & Siebenmann, L. C. (1977). *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*. Princeton University Press.

5. Milnor, J. (1956). On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*.
6. Moise, E. E. (1952). Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Annals of Mathematics*.
7. Newman, M. H. A. (1966). The engulfing theorem for topological manifolds. *Annals of Mathematics*.
8. Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv*.
9. Perelman, G. (2003). Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv*.
10. Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*.
11. Stallings, J. (1960). Polyhedral homotopy-spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society*.
12. Wang, G., & Xu, Z. (2017). The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. *Annals of Mathematics*.
13. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Interpretation of the 3D Poincaré Conjecture via the $n=2$ Uniqueness Theorem and Perelman's Ricci Flow* [Article 07]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404387
14. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Interpretation of the 4D Poincaré Conjecture and Exotic Structures via the $n=3$ Uniqueness Theorem and Hopf Fibration* [Article 08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Exception Only in Four Dimensions* [Article 105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
16. Yamagishi, Y. (2026). *Which Objects Know They Are in Four Dimensions?* [Article 114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
17. Yamagishi, Y. (2026). *Only Four Numbers Sit Exactly on the Equality Below a Million, While the Inequality Just Above It Takes a Quarter* [Article 810]. Zenodo.
18. Zeeman, E. C. (1962). The Poincaré conjecture for n greater than or equal to 5. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*. Prentice-Hall.

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)