

La congettura di Poincaré è una domanda diversa in ogni categoria, e solo la dimensione quattro resta aperta sia in PL sia nel liscio

— le dimensioni 5 e 6 stanno dove l'intervallo in cui PL e liscio coincidono si sovrappone all'intervallo del teorema dell'h-cobordismo, e sono quindi decise anche nel liscio, mentre la dimensione 4 sta solo nel primo — il separatore è se la dimensione sia al più 6 o almeno 5 — [Articolo 1003]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

La congettura di Poincaré chiede se una varietà chiusa omotopicamente equivalente alla n -sfera sia la sfera, ma diventa tre domande diverse a seconda che «essere la stessa della sfera» sia letto nella categoria topologica (TOP), lineare a tratti (PL) o liscia (DIFF). Questo articolo costruisce una tabella con le dimensioni come colonne e le tre categorie come righe, e ne conta le celle con teoremi trascritti e numeri calcolati dai numeri di Bernoulli. Non si rivendica alcun teorema nuovo e non si risolve alcuna cella.

Primo, la riga topologica vale in ogni dimensione, e l'unica cella aperta della riga PL è la dimensione 4 — le dimensioni 1 e 2 sono classiche, 3 è Perelman, 4 è Freedman (1982), e 5 e oltre sono Smale (1961) e Newman (1966). Fra le dimensioni da 1 a 8, l'unica aperta sia in PL sia nel liscio è la dimensione 4 (Sezione 2).

Secondo, ed è il nucleo. Le dimensioni 5 e 6 stanno nella sovrapposizione di due intervalli e sono decise anche nel liscio, mentre la dimensione 4 sta in uno solo — l'intervallo in cui PL e liscio danno le stesse strutture (dimensione al più 6) e l'intervallo del teorema dell' h -cobordismo (dimensione almeno 5) si sovrappongono nelle 2 dimensioni 5 e 6, dove la congettura PL porta con sé quella liscia. Solo nel primo intervallo stanno le 4 dimensioni 1, 2, 3, 4; da 1 a 3 le tre categorie si riducono a una e la domanda è chiusa, e solo 4 resta aperta sia in PL sia nel liscio (Sezione 3).

Terzo, la riga liscia per le dimensioni da 1 a 139 ha 8 dimensioni con struttura unica, 1 aperta e 130 con sfere esotiche — le dimensioni con struttura liscia unica sono 1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61 (trascritto: le dispari da Wang e Xu 2017, le pari sotto 140 da Behrens et al. 2020). Delle 133 dimensioni da 7 a 139 che stanno solo nel secondo intervallo, 3 (12, 56, 61) hanno una struttura unica, una frazione di **0.022556** (Sezione 4).

Quarto, i soli numeri di Bernoulli decidono 34 delle 130 dimensioni con sfere esotiche — calcolare l'ordine di bP dai numeri di Bernoulli dà 28, 992, 8128, 261632, in accordo con la tabella trascritta (i numeri di Bernoulli ottenuti dalla funzione zeta concordano entro una differenza relativa di 4.290×10^{-14}). Le 34 dimensioni da 7 a 139 che danno resto 3 nella divisione per 4 hanno tutte ordine almeno 28 e quindi sfere esotiche, una frazione di **0.261538** (Sezione 4).

Quinto, il fattore nell'ordine di bP ha la forma di un numero perfetto — l'ordine stesso è un numero perfetto solo per 28 e 8128 ($k =$ da 2 a 35); 992 è esattamente il doppio del numero perfetto 496 ed è abbondante, con rapporto della somma dei divisori **2.032258**. Si conta solo la forma comune, e non si dà alcuna ragione (Sezione 5).

Sesto, il separatore è se la dimensione sia al più 6 o almeno 5 — 5 e 6, in entrambi, sono decise nel liscio; 4, solo al più 6, è aperta sia in PL sia nel liscio; per 7 e oltre, solo almeno 5, è l'ordine del gruppo delle sfere esotiche a decidere la risposta liscia (Sezione 6).

Parole chiave: congettura di Poincaré, sfera esotica, teorema dell'h-cobordismo, varietà lineare a tratti, struttura liscia, numero di Bernoulli.

Portata (scope note): Non si rivendica alcun teorema nuovo——le soluzioni topologica e PL della congettura di Poincaré generalizzata (Smale 1961, Stallings 1960, Zeeman 1962, Newman 1966, Freedman 1982, Perelman), la 7-sfera esotica di Milnor (1956), il gruppo Θ di Kervaire e Milnor (1963) e la formula per l'ordine di bP, la coincidenza delle strutture PL e lisce in dimensione al più 6 (risultati raccolti in Kirby e Siebenmann 1977), la coincidenza delle tre categorie in dimensione 3 (Moise 1952), l'esistenza di 4-varietà topologiche senza struttura PL (Freedman 1982), e le liste di Wang e Xu (2017) e di Behrens et al. (2020) sono tutte note. Non si risolve alcuna cella——nulla si aggiunge alla congettura di Poincaré PL o liscia in dimensione 4. I fatti trascritti non sono rivendicati come calcolati——le liste di teoremi e la tabella degli ordini di Θ per n al più 20 sono trascritte; ciò che è stato calcolato sono i numeri di Bernoulli, gli ordini di bP, conteggi di insiemi di dimensioni e somme dei divisori. Il valore di Θ in dimensione 4 non è usato——in dimensione 5 e oltre è il teorema dell'h-cobordismo a rendere un Θ banale equivalente a una struttura liscia unica sulla sfera, e la dimensione 4 sta fuori dal suo intervallo. Le dimensioni pari da 140 in su non sono contate——stanno fuori dai due risultati citati, e questo articolo non dice che cosa vi sia stato raggiunto. Non si dà alcuna ragione per la forma comune con i numeri perfetti——si contano solo la forma comune e i valori di k per cui l'ordine stesso è un numero perfetto. Rapporto con gli articoli precedenti: la portata dell'Articolo 08 diceva che la congettura di Poincaré liscia in dimensione 4 è ancora aperta, e la portata dell'Articolo 114 diceva che non la tocca; questo articolo viene posto accanto a loro e conta dove quella cella si trovi nella tabella delle tre categorie e delle dimensioni (nessun occupante precedente). L'Articolo 07 ha messo la soluzione topologica della congettura di Poincaré in una tabella per dimensione (2 classica, 3 Perelman, 4 Freedman, 5 e oltre Smale)——qui si aggiungono alle stesse colonne due righe per PL e liscio. L'Articolo 105 ha affermato che $\mathbb{R}^n$ ha più di una struttura liscia solo per $n = 4$ ——qui si conta che per la sfera S^n la dimensione 4 resta aperta mentre 130 delle dimensioni da 1 a 139 hanno più di una struttura liscia. L'Articolo 810 ha contato i numeri perfetti fino a 10^6 come i 4 numeri 6, 28, 496, 8128——qui si conta che l'ordine di bP coincide con 28 e 8128 fra essi, e che la forma di 6 non compare mai. Ciò che si aggiunge è dividere la tabella delle tre categorie e delle dimensioni in tre fasce mediante la sovrapposizione dell'intervallo in cui PL e liscio coincidono con l'intervallo del teorema dell'h-cobordismo, mostrare che le dimensioni 5 e 6 stanno nella sovrapposizione e sono decise nel liscio, mentre la dimensione 4 sta in un solo intervallo, calcolare gli ordini di bP dai numeri di Bernoulli e confrontarli con la tabella trascritta, contare la riga liscia per le dimensioni da 1 a 139 e trovare 34 dimensioni decise dai soli numeri di Bernoulli, e contare i valori di k per cui l'ordine di bP è esso stesso un numero perfetto.

1. Notazione e domanda

Impostazione: una n -varietà chiusa omotopicamente equivalente alla n -sfera S^n si chiama n -sfera d'omotopia. A seconda che «essere la stessa della sfera» sia letto come omeomorfo (la categoria topologica TOP), omeomorfo in modo lineare a tratti (PL) o diffeomorfo (DIFF), la congettura di Poincaré diventa tre domande. Kervaire e Milnor introdussero il gruppo Θ_n delle classi di h-cobordismo di n -sfere d'omotopia orientate e il suo sottogruppo bP_{n+1} di quelle che bordano varietà parallelizzabili, e mostrarono per $k \geq 2$:

$$|bP_{4k}| = 2^{2k-2} (2^{2k-1} - 1) \cdot \text{num}(4B_{2k}/k)$$

Qui B_{2k} è un numero di Bernoulli e num il numeratore della frazione ridotta. In dimensione 5 e oltre il teorema dell'h-cobordismo rende un Θ_n banale equivalente a una struttura liscia unica su S^n .

Domanda: nella tabella con le dimensioni come colonne e le tre categorie come righe, quale cella è aperta sia in PL sia nel liscio, e in che cosa differisce dalle altre celle?

2. Le tre righe

Calcolo 2.1: le soluzioni trascritte sono state messe in una tabella per le dimensioni da 1 a 8 (vero significa che la congettura vale, falso che fallisce).

n	TOP	PL	DIFF	risultati decisivi
1	vero	vero	vero	classico
2	vero	vero	vero	classico
3	vero	vero	vero	Perelman (topologico), Moise (le tre categorie coincidono)
4	vero	aperto	aperto	Freedman (topologico)
5	vero	vero	vero	Smale, Zeeman, Newman
6	vero	vero	vero	Smale, Zeeman, Newman
7	vero	vero	falso	Milnor, Kervaire e Milnor
8	vero	vero	falso	Kervaire e Milnor

Osservazione 2.2: la riga topologica vale in ogni dimensione, e l'unica cella aperta della riga PL è la dimensione 4. Fra le dimensioni da 1 a 8 solo $n = 4$ è aperta sia in PL sia nel liscio, e le dimensioni in cui le risposte topologica e liscia sono entrambe decise ma differiscono sono $n = 7$ e 8—in dimensione 4 PL e liscio danno le stesse strutture, quindi le due celle aperte sono un'unica domanda.

3. La sovrapposizione di due intervalli

Calcolo 3.1: prendendo A come le dimensioni in cui PL e liscio danno le stesse strutture ($n \leq 6$) e B come l'intervallo del teorema dell'h-cobordismo ($n \geq 5$), le dimensioni da 1 a 139 sono state divise in tre fasce.

fascia	dimensioni	numero	riga liscia
A e B	5, 6	2	vero (anche nelle liste trascritte)
solo A	1, 2, 3, 4	4	da 1 a 3 vero, 4 aperto
solo B	da 7 a 139	133	vero per le 3 dimensioni 12, 56, 61

Osservazione 3.2: questo è il nucleo. Le dimensioni 5 e 6 stanno nella sovrapposizione dei due intervalli e sono decise anche nel liscio, mentre la dimensione 4 sta solo in A e resta aperta sia in PL sia nel liscio. Nelle dimensioni 5 e 6 il teorema dell'h-cobordismo fa valere la congettura PL, e poiché PL e liscio danno le stesse strutture, vale anche la congettura liscia. Anche le due liste trascritte di teoremi contenevano 5 e 6—anche le dimensioni 1, 2, 3 stanno solo in A, ma lì topologico, PL e liscio si riducono a uno, e la risposta topologica diventa la risposta di tutte e tre le righe. In dimensione 4 esistono varietà topologiche senza struttura PL, quindi topologico e PL non si riducono insieme, e solo la riga topologica è chiusa.

4. Contare la riga liscia

Calcolo 4.1: i numeri di Bernoulli sono stati costruiti come frazioni esatte dalla ricorrenza ($B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_{12} = -691/2730$), confrontati con i valori della funzione zeta per $k = 1$ fino a 35 entro una differenza relativa di 4.290×10^{-14} , e poi si è contato $|bP_{4k}|$.

k	$n = 4k - 1$	$2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$	numeratore	$ bP_{4k} $	$ \Theta_n $ trascritto	quoziente
2	7	28	1	28	28	1
3	11	496	2	992	992	1
4	15	8128	1	8128	16256	2
5	19	130816	2	261632	523264	2
6	23	2096128	691	1448424448	fuori tabella	fuori tabella

Calcolo 4.2: la riga liscia per le dimensioni da 1 a 139 è stata contata con le liste trascritte (dimensioni dispari da Wang e Xu 2017, dimensioni pari sotto 140 da Behrens et al. 2020).

classe	numero di dimensioni	quali
struttura liscia unica	8	1, 2, 3, 5, 6, 12, 56, 61
aperto	1	4
esistono sfere esotiche	130	incluse le 34 con resto 3 nella divisione per 4

Osservazione 4.3: nella riga liscia, i soli numeri di Bernoulli decidono 34 delle 130 dimensioni con sfere esotiche. Le 34 dimensioni da 7 a 139 con resto 3 nella divisione per 4 hanno tutte $|bP_{4k}|$ almeno 28 e quindi sfere esotiche, una frazione di **0.261538**. Nella fascia solo B, 3 dimensioni su 133 hanno una struttura liscia unica, una frazione di **0.022556**——le restanti 96 dimensioni sono decise al di fuori della formula per l’ordine di bP, e questo articolo non le calcola. Le liste trascritte non contengono nessuna delle 34 dimensioni e non contraddicono il calcolo.

5. La forma del conteggio

Calcolo 5.1: il fattore $2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$ nell’ordine di bP è stato scritto come $2^{p-1}(2^p - 1)$ con $p = 2k - 1$, e si è verificato se $2^p - 1$ sia primo (il test di Lucas–Lehmer) e se la somma dei divisori σ sia uguale a $2n$.

k	p	$2^p - 1$	$2^{p-1}(2^p - 1)$	numeratore	$ bP_{4k} $
2	3	7 (primo)	28 (perfetto)	1	28
3	5	31 (primo)	496 (perfetto)	2	992
4	7	127 (primo)	8128 (perfetto)	1	8128
5	9	$511 = 7 \times 73$	130816	2	261632
7	13	8191 (primo)	33550336 (perfetto)	2	67100672

Osservazione 5.2: il fattore nell'ordine di bP ha la forma di un numero perfetto, e l'ordine stesso era un numero perfetto solo per 28 e 8128. Per $k = 2$ fino a 35 ci sono 8 valori di k con $2^{2k-1} - 1$ primo, ma il numeratore è 1 solo per $k = 2$ e 4; il 992 a $k = 3$ è esattamente 2 volte 496, con $\sigma(992) = 2016$, un numero abbondante con rapporto **2.032258**——poiché $p = 2k - 1$ è sempre dispari, la forma del numero perfetto 6 ($p = 2$) non compare mai. Si è contata solo la forma comune; non si rivendica alcuna ragione che leghi sfere esotiche e numeri perfetti.

6. Il separatore e ciò che non si dice

Osservazione 6.1: il separatore è se la dimensione sia al più 6 o almeno 5.5 e 6, in entrambi gli intervalli, sono decise nel liscio; 4, solo al più 6, è aperta sia in PL sia nel liscio; per 7 e oltre, solo almeno 5, è l'ordine di Θ_n a decidere la risposta liscia——fra le dimensioni che stanno solo al più 6, 1, 2, 3 sono chiuse perché le tre categorie si riducono a una, e solo 4 è aperta.

Osservazione 6.2: ciò che non si dice. Nulla si aggiunge alla congettura di Poincaré PL o liscia in dimensione 4. Il valore di Θ in dimensione 4 non è usato, perché essa sta fuori dall'intervallo del teorema dell'h-cobordismo che rende un Θ banale equivalente a una struttura liscia unica——ciò che è stato raggiunto nelle dimensioni pari da 140 in su non viene detto, perché sta fuori dai due risultati citati. Non si dà alcuna ragione per la forma comune con i numeri perfetti.

7. Censimento e chiusura

- la riga topologica vera in ogni dimensione, l'unica cella PL aperta a $n = 4$ (Calcolo 2.1): in dimensione 4, PL e liscio sono un'unica domanda.
- la sovrapposizione A e B sono le 2 dimensioni 5, 6 (Calcolo 3.1): il nucleo; decise nel liscio.
- la fascia solo A è 1, 2, 3, 4 (Osservazione 3.2): da 1 a 3 si riducono e si chiudono; solo 4 è aperta.

4. $|bP_{4k}|$ è 28, 992, 8128, 261632 (Calcolo 4.1): in accordo con la tabella trascritta, quozienti 1, 1, 2, 2.
5. dimensioni da 1 a 139: unica 8, aperta 1, esotica 130 (Calcolo 4.2): dispari da Wang e Xu, pari da Behrens et al.
6. 34 dimensioni decise dai soli numeri di Bernoulli (**0.261538**) (Osservazione 4.3): resto 3 nella divisione per 4.
7. 3 dimensioni uniche nella fascia solo B (**0.022556**) (Osservazione 4.3): 12, 56, 61.
8. l'ordine è esso stesso perfetto solo per 28 e 8128 (Osservazione 5.2): 992 è abbondante con rapporto **2.032258**.
9. se la dimensione sia al più 6 o almeno 5 (Osservazione 6.1): il separatore; Articoli 08, 114, 07, 105, 810.

Chiusura: La congettura di Poincaré è una domanda diversa in ogni categoria, e solo la dimensione quattro resta aperta sia in PL sia nel liscio. La riga topologica è chiusa in ogni dimensione, la riga PL è aperta solo in dimensione 4, e in dimensione 4 PL e liscio diventano la stessa domanda——le dimensioni al più 6, dove PL e liscio coincidono, e le dimensioni almeno 5, l'intervallo del teorema dell'h-cobordismo, si sovrappongono nelle 2 dimensioni 5 e 6, che sono decise nel liscio. Di 1, 2, 3, 4, che stanno solo al più 6, da 1 a 3 si chiudono perché le tre categorie si riducono, e solo 4 resta aperta. La riga liscia per le dimensioni da 1 a 139 è unica 8, aperta 1, esotica 130; gli ordini di bP calcolati dai soli numeri di Bernoulli decidono 34 dimensioni (0.261538) e concordano con la tabella trascritta——l'ordine è esso stesso un numero perfetto solo per 28 e 8128, e non si dà alcuna ragione per la forma comune. Il separatore è se la dimensione sia al più 6 o almeno 5. Collocato fra gli articoli precedenti——l'Articolo 07 ha messo la soluzione topologica in una tabella per dimensione, l'Articolo 105 ha affermato che $\mathbb{R}^n$ ha più di una struttura liscia solo in dimensione 4, e l'Articolo 810 ha contato 4 numeri perfetti fino a 10^6 . Qui la cella liscia in dimensione 4, che l'Articolo 08 e l'Articolo 114 scrivevano essere aperta, è stata collocata nella tabella delle tre categorie e delle dimensioni, e si è contata la sua differenza dalle dimensioni vicine 5 e 6. Detto onestamente——nessuna cella è stata risolta, e le liste di teoremi e la tabella per n al più 20 sono trascritte. Ciò che è stato raggiunto nelle dimensioni pari da 140 in su, e il valore di Θ in dimensione 4, non vengono detti.

Bibliografia

1. Behrens, M., Hill, M., Hopkins, M. J., & Mahowald, M. (2020). Detecting exotic spheres in low dimensions using coker J. *Journal of the London Mathematical Society*.
2. Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*.
3. Kervaire, M. A., & Milnor, J. W. (1963). Groups of homotopy spheres: I. *Annals of Mathematics*.
4. Kirby, R. C., & Siebenmann, L. C. (1977). *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*. Princeton University Press.
5. Milnor, J. (1956). On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*.
6. Moise, E. E. (1952). Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Annals of Mathematics*.
7. Newman, M. H. A. (1966). The engulfing theorem for topological manifolds. *Annals of Mathematics*.

8. Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv*.
9. Perelman, G. (2003). Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv*.
10. Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*.
11. Stallings, J. (1960). Polyhedral homotopy-spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society*.
12. Wang, G., & Xu, Z. (2017). The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. *Annals of Mathematics*.
13. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Interpretation of the 3D Poincaré Conjecture via the $n=2$ Uniqueness Theorem and Perelman's Ricci Flow* [Articolo 07]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404387
14. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Interpretation of the 4D Poincaré Conjecture and Exotic Structures via the $n=3$ Uniqueness Theorem and Hopf Fibration* [Articolo 08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Exception Only in Four Dimensions* [Articolo 105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
16. Yamagishi, Y. (2026). *Which Objects Know They Are in Four Dimensions?* [Articolo 114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
17. Yamagishi, Y. (2026). *Only Four Numbers Sit Exactly on the Equality Below a Million, While the Inequality Just Above It Takes a Quarter* [Articolo 810]. Zenodo.
18. Zeeman, E. C. (1962). The Poincaré conjecture for n greater than or equal to 5. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*. Prentice-Hall.

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)