

ポアンカレ予想は圏ごとに別の問いで、PL でも微分でも開いたままの次元は 4 だけである

— 5・6 次元は PL と微分が一致する範囲と h-同境定理の範囲の重なりに入って微分まで決まり、4 次元は前者にだけ入る — 分離子は、次元が 6 以下か 5 以上か — [論文1003]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ポアンカレ予想は「 n 次元の球面とホモトピー同値な閉多様体は球面か」を問うが、「球面と同じ」を位相 (TOP)・区分線形 (PL)・微分 (DIFF) のどの圏で読むかで、三つの別の問いになる。本稿は、次元を列、三つの圏を行とする表を作り、書き写した定理と、ベルヌーイ数から計算した数で、表のますを数える。新しい定理は主張せず、どのますも解かない。第一に、位相の行はすべての次元で正しく、PL の行で開いているのは 4 次元だけである——1・2 次元は古典、3 次元はペレルマン、4 次元はフリードマン (1982)、5 次元以上はスメイル (1961) とニューマン (1966) が位相の行を閉じた。次元 1~8 で PL と微分がそろって未決なのは 4 次元の一つだけである (第2節)。第二に、これが本稿の芯である。5・6 次元は二つの範囲の重なりに入って微分まで決まり、4 次元は片方にだけ入る——PL と微分が同じ構造を与える範囲 (6 次元以下) と、h-同境定理の範囲 (5 次元以上) の重なりは 5・6 の 2 個で、そこでは PL の予想が微分の予想を運ぶ。6 次元以下にだけ入るのは 1・2・3・4 の 4 個で、1~3 は三つの圏が一つに畳まれて閉じ、4 だけが PL でも微分でも開く (第3節)。第三に、1~139 次元の微分の行は、一つ 8・未決 1・異種球面あり 130 である——微分構造が一つなのは 1・2・3・5・6・12・56・61 (奇数は Wang=Xu 2017、140 未満の偶数は Behrens ら 2020 の書き写し) で、5 次元以上にだけ入る 7~139 の 133 個のうち一つなのは 12・56・61 の 3 個、割合 **0.022556** である (第4節)。第四に、ベルヌーイ数だけで決まるのは、異種球面のある 130 次元のうち 34 次元である——bP の位数をベルヌーイ数から計算すると 28・992・8128・261632 で、書き写した表と一致した (ゼータ関数からのベルヌーイ数とは相対差 4.290×10^{-14} 以内)。4 で割って 3 余る 7~139 の 34 次元はどれも位数が 28 以上で異種球面を持ち、割合は **0.261538** である (第4節)。第五に、bP の位数の因子は完全数の形をしている——位数そのものが完全数になるのは 28 と 8128 だけで ($k=2 \sim 35$)、992 は完全数 496 のちょうど 2 倍、約数の和の比 **2.032258** の過剰数である。形が同じことを数えるだけで、理由は言わない (第5節)。第六に、分離子は、次元が 6 以下か 5 以上かである——両方に入る 5・6 は微分まで決まり、6 以下にだけ入る 4 は PL と微分がそろって開き、5 以上にだけ入る 7 以上は異種球面の群の位数が微分の答えを決める (第6節)。キーワード：ポアンカレ予想、異種球面、h-同境定理、区分線形多様体、微分構造、ベルヌーイ数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理を主張しない——一般化ポアンカレ予想の位相と PL の解決（スメイル 1961・スタリングス 1960・ゼーマン 1962・ニューマン 1966・フリードマン 1982・ペレルマン）、ミルナー（1956）の 7 次元の異種球面、ケルヴェア＝ミルナー（1963）の群 Θ と bP の位数の式、PL と微分の構造が 6 次元以下で一致すること（カービー＝ジーベンマン 1977 にまとめられた結果）、3 次元で三つの圏が一致すること（モイーズ 1952）、PL 構造を持たない位相の 4 次元多様体があること（フリードマン 1982）、Wang＝Xu（2017）と Behrens ら（2020）の一覧は、いずれも既知である。どのますも解かない——4 次元の PL と微分のポアンカレ予想に、何も加えない。書き写した事実を計算したとは言わない——定理の一覧と $n \leq 20$ の Θ の位数の表は書き写しで、計算したのはベルヌーイ数、 bP の位数、次元の集合の数え上げ、約数の和である。4 次元の Θ の値を使わない——5 次元以上で、 Θ が自明なことと球面の微分構造が一つであることを同じにするのは h -同境定理で、4 次元はその範囲の外にある。140 以上の偶数次元を数えない——そこは引いた二つの結果の範囲の外で、本稿はそこでの到達を述べない。完全数との形の一致に理由を言わない——同じ形であることと、どの k で位数が完全数そのものになるかを数えるだけである。既刊との関係：論文08 の射程注記は、可微分な 4 次元ポアンカレ予想は現在も未解決と書き、論文114 の射程注記は、それに触れないと書いた——本稿はその隣に置き、そのますが三つの圏と次元の表のどこに居るかを数える（先客なし）。論文07 は、位相のポアンカレ予想の解決を次元ごとの表（2 次元は古典・3 次元はペレルマン・4 次元はフリードマン・5 次元以上はスメイル）にした——ここでは、同じ列に PL と微分の二行を足す。論文105 は、 $\mathbb{R}^n$ の微分構造が一つでないのは $n=4$ だけだと述べた——ここでは、球面 S^n では 4 次元が未決のまま、1～139 次元のうち 130 次元で微分構造が一つでないことを数える。論文810 は、 10^6 までの完全数が $6 \cdot 28 \cdot 496 \cdot 8128$ の 4 個であることを数えた——ここでは、 bP の位数がそのうち 28 と 8128 に一致し、6 の形は現れないことを数える。加えたのは、三つの圏と次元の表を、PL と微分が一致する範囲と h -同境定理の範囲の重なりで三つの帯に分けたこと、5・6 次元が重なりに入って微分まで決まり、4 次元が片方にだけ入ることを示したこと、 bP の位数をベルヌーイ数から計算して書き写した表と突き合わせたこと、1～139 次元の微分の行を数え、ベルヌーイ数だけで決まる部分を 34 次元と数えたこと、 bP の位数が完全数そのものになる k を数えたことである。

1. 記法と問い

設定： n 次元の球面 S^n とホモトピー同値な閉 n 次元多様体を、ホモトピー n 球面と呼ぶ。「球面と同じ」を同相（位相の圏 TOP）、区分線形同相（PL）、微分同相（DIFF）のどれで読むかで、ポアンカレ予想は三つの問いになる。ケルヴェアとミルナーは、向きのついたホモトピー n 球面の h -同境類がなす群 Θ_n と、平行化可能な多様体の境界になるものの部分群 bP_{n+1} を置き、 $k \geq 2$ で次を示した。

$$|bP_{4k}| = 2^{2k-2} (2^{2k-1} - 1) \cdot \text{num}(4B_{2k}/k)$$

ここで B_{2k} はベルヌーイ数、 num は既約分数の分子である。5 次元以上では、 h -同境定理により、 Θ_n が自明であることと S^n の微分構造が一つであることが同じになる。

問い：次元を列、三つの圏を行とする表で、PLでも微分でも開いているますはどこか。そのますは、ほかのますと何が違うか。

2. 三つの行

計算 2.1：書き写した解決を、次元 1～8 の表にした（正は予想が成り立つ、偽は成り立たない）。

n	TOP	PL	DIFF	決めた結果
1	正	正	正	古典
2	正	正	正	古典
3	正	正	正	ベレルマン（位相）・モイーズ（三つの圏の一致）
4	正	未決	未決	フリードマン（位相）
5	正	正	正	スメイル・ゼーマン・ニューマン
6	正	正	正	スメイル・ゼーマン・ニューマン
7	正	正	偽	ミルナー・ケルヴェア＝ミルナー
8	正	正	偽	ケルヴェア＝ミルナー

観察 2.2

位相の行はすべての次元で正しく、PL の行で開いているのは 4 次元だけである。次元 1～8 で PL と微分がそろって未決なのは $n = 4$ の一つだけで、位相と微分で答えが分かれて決まっているのは $n = 7 \cdot 8$ である——4 次元では PL と微分が同じ構造を与えるので、二つの未決は一つの問いである。

3. 二つの範囲の重なり

計算 3.1：PL と微分が同じ構造を与える次元を A ($n \leq 6$)、h-同境定理の範囲を B ($n \geq 5$) として、1～139 次元を三つの帯に分けた。

帯	次元	個数	微分の行
A かつ B	5・6	2	正（書き写した一覧にも入る）
A だけ	1・2・3・4	4	1〜3 は正、4 は未決
B だけ	7〜139	133	正は 12・56・61 の 3 個

観察 3.2

これが本稿の芯である。5・6 次元は二つの範囲の重なりに入って微分まで決まり、4 次元は A にだけ入って PL でも微分でも開く。5・6 次元では h-同境定理で PL の予想が成り立ち、PL と微分が同じ構造を与えるので、微分の予想も成り立つ。書き写した二つの定理の一覧にも 5 と 6 は入っていた——1・2・3 次元も A にだけ入るが、そこでは位相・PL・微分の三つが一つに畳まれ、位相の答えがそのまま三つの行の答えになる。4 次元では PL 構造を持たない位相多様体があって位相と PL が畳まれず、位相の行だけが閉じている。

4. 微分の行を数える

計算 4.1：ベルヌーイ数を漸化式の厳密な分数で作り（ $B_4 = -1/30 \cdot B_6 = 1/42 \cdot B_{12} = -691/2730$ ）、ゼータ関数から作った値と $k = 1 \sim 35$ で相対差 4.290×10^{-14} 以内で一致させてから、 $|bP_{4k}|$ を数えた。

k	$n = 4k - 1$	$2^{2k-2}(2^{2k-1} - 1)$	分子	$ bP_{4k} $	書き写した $ \Theta_n $	商
2	7	28	1	28	28	1
3	11	496	2	992	992	1
4	15	8128	1	8128	16256	2
5	19	130816	2	261632	523264	2
6	23	2096128	691	1448424448	表の外	表の外

計算 4.2：1〜139 次元の微分の行を、書き写した一覧（奇数次元は Wang=Xu 2017、140 未満の偶数次元は Behrens ら 2020）で数えた。

区分	次元の数	内訳
微分構造が一つ	8	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 56 \cdot 61$
未決	1	4
異種球面がある	130	うち 4 で割って 3 余る 34

観察 4.3

微分の行でベルヌーイ数だけで決まるのは、異種球面のある 130 次元のうち 34 次元である。4 で割って 3 余る 7~139 の 34 次元は $|bP_{4k}|$ がどれも 28 以上なので異種球面を持ち、割合は **0.261538** である。B だけの帯で微分構造が一つなのは 133 個のうち 3 個で、割合は **0.022556** である——残る 96 次元は bP の位数の式の外で決まる部分で、本稿は計算していない。書き写した一覧は 34 次元のどれも含まず、計算と食い違わなかった。

5. 数え表の形

計算 5.1： bP の位数の因子 $2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)$ を $p=2k-1$ で $2^{p-1}(2^p-1)$ と書き、 2^p-1 が素数か（ルークス＝レーマーの判定）と、約数の和 σ が $2n$ になるかを見た。

k	p	2^p-1	$2^{p-1}(2^p-1)$	分子	$ bP_{4k} $
2	3	7（素数）	28（完全数）	1	28
3	5	31（素数）	496（完全数）	2	992
4	7	127（素数）	8128（完全数）	1	8128
5	9	$511 = 7 \times 73$	130816	2	261632
7	13	8191（素数）	33550336（完全数）	2	67100672

観察 5.2

bP の位数の因子は完全数の形をしており、位数そのものが完全数になるのは 28 と 8128 だけだった。 $k = 2 \sim 35$ で $2^{2k-1} - 1$ が素数になる k は 8 個あるが、分子が 1 になるのは $k = 2 \cdot 4$ だけで、 $k = 3$ の 992 は 496 のちょうど 2 倍、 $\sigma(992) = 2016$ で比は **2.032258** の過剰数である—— $p = 2k - 1$ はいつも奇数なので、完全数 6 ($p = 2$) の形は現れない。形が同じことを数えただけで、異種球面と完全数のあいだに理由があるとは言わない。

6. 分離子と、言わないこと

観察 6.1

分離子は、次元が 6 以下か 5 以上かである。両方に入る $5 \cdot 6$ は微分まで決まり、6 以下にだけ入る 4 は PL と微分がそろって開き、5 以上にだけ入る 7 以上は Θ_n の位数が微分の答えを決める——同じ「6 以下にだけ入る」でも、 $1 \cdot 2 \cdot 3$ は三つの圏が一つに畳まれて閉じ、4 だけが開く。

観察 6.2

言わないこと。4 次元の PL と微分のポアンカレ予想に何も加えない。4 次元の Θ の値は使わない—— Θ の自明と微分構造の一意を同じにする h-同境定理の範囲の外だからである——140 以上の偶数次元での到達は、引いた二つの結果の範囲の外として述べない。完全数との形の一致に理由を言わない。

7. 点呼と結び

1. 位相の行は全次元で正、PL の行の未決は $n = 4$ だけ（計算 2.1）：4 次元では PL と微分が一つの問い。
2. 重なり A かつ B は $5 \cdot 6$ の 2 個（計算 3.1）：本稿の芯。微分まで決まる。
3. A だけの帯は $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ （観察 3.2）：1~3 は畳まれて閉じ、4 だけが開く。
4. $|bP_{4k}|$ は $28 \cdot 992 \cdot 8128 \cdot 261632$ （計算 4.1）：書き写した表と一致、商は $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$ 。
5. 1~139 次元で一つ 8・未決 1・異種球面あり 130（計算 4.2）：奇数は Wang=Xu、偶数は Behrens ら。
6. ベルヌーイ数だけで決まる 34 次元 (**0.261538**)（観察 4.3）：4 で割って 3 余る次元。
7. B だけの帯で一つなのは 3 個 (**0.022556**)（観察 4.3）：12・56・61。
8. 位数が完全数そのものになるのは 28・8128（観察 5.2）：992 は比 **2.032258** の過剰数。

9. 次元が 6 以下か 5 以上か（観察 6.1）：分離子・論文08・114・07・105・810。

結び：ポアンカレ予想は圏ごとに別の問いで、PL でも微分でも開いたままの次元は 4 だけである。位相の行はすべての次元で閉じ、PL の行で開くのは 4 次元だけで、4 次元では PL と微分が同じ問いになる——PL と微分が一致する 6 次元以下と、h-同境定理の 5 次元以上の重なりは $5 \cdot 6$ の 2 個で、そこは微分まで決まる。6 次元以下にだけ入る $1 \cdot 2 \cdot 3$ は三つの圏が畳まれて閉じ、4 だけが開く。1~139 次元の微分の行は一つ 8・未決 1・異種球面あり 130 で、ベルヌーイ数から計算した bP の位数だけで決まるのは 34 次元 (0.261538)、bP の位数は書き写した表と一致した——位数そのものが完全数になるのは 28 と 8128 だけで、形が同じ理由は言わない。分離子は、次元が 6 以下か 5 以上かである。既刊との位置——論文07 は位相の解決を次元ごとの表にし、論文105 は $\mathbb{R}^n$ の微分構造が一つでないのは 4 次元だけだと述べ、論文810 は 10^6 までの完全数を 4 個と数えた。ここでは、論文08 と論文114 が未解決と書いた 4 次元の微分のますを、三つの圏と次元の表に置き、 $5 \cdot 6$ 次元と何が違うかを数えた。正直に言えば——どのますも解いておらず、定理の一覧と $n \leq 20$ の表は書き写しである。140 以上の偶数次元での到達と、4 次元の Θ の値は述べていない。

参考文献

1. Behrens, M., Hill, M., Hopkins, M. J., & Mahowald, M. (2020). Detecting exotic spheres in low dimensions using coker J. *Journal of the London Mathematical Society*.
2. Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*.
3. Kervaire, M. A., & Milnor, J. W. (1963). Groups of homotopy spheres: I. *Annals of Mathematics*.
4. Kirby, R. C., & Siebenmann, L. C. (1977). *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations*. Princeton University Press.
5. Milnor, J. (1956). On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*.
6. Moise, E. E. (1952). Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Annals of Mathematics*.
7. Newman, M. H. A. (1966). The engulfing theorem for topological manifolds. *Annals of Mathematics*.
8. Perelman, G. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv*.
9. Perelman, G. (2003). Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv*.
10. Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*.
11. Stallings, J. (1960). Polyhedral homotopy-spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society*.
12. Wang, G., & Xu, Z. (2017). The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres. *Annals of Mathematics*.
13. 山岸勇輝 (2026). 『 $n=2$ 唯一性定理とペレルマン・リッチフローに基づく 3次元ポアンカレ予想の構造的解釈』[論文07]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404387
14. 山岸勇輝 (2026). 『 $n=3$ 唯一性定理とホップファイブレーションに基づく 4次元ポアンカレ予想とエキゾチック構造の構造的解釈』[論文08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419

15. 山岸勇輝 (2026). 『4次元だけの例外』 [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
16. 山岸勇輝 (2026). 『「4次元らしさ」を担うのは誰か』 [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
17. 山岸勇輝 (2026). 『等号にちょうど乗る数は百万までに四個しかないのに、すぐ上の不等号は四分の一を占める』 [論文810]. Zenodo.
18. Zeeman, E. C. (1962). The Poincaré conjecture for n greater than or equal to 5. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*. Prentice-Hall.

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)