交点を消す円板は、5 次元以上では自分と交わらず、4 次元でだけ点で交わる

— ホイットニーの技法の円板が一般の位置で自分と交わる次元は 2＋2−n で、円板と二つの球面を合わせた三つの交わりがそろって点になるのは 4 次元の 2＋2 の分け方だけである — 分離子は、円板の次元 2 が中間の次元 n/2 に届くか — [論文1004]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ホイットニーの技法は、n 次元の多様体の中で p 次元と q 次元（p＋q＝n）の二つが符号の逆な二点で交わるとき、二点を結ぶ円を 2 次元の円板で埋め、円板に沿って押して二点を消す。h-同境定理（スメイル 1962）は端の次元が 5 以上でこの技法を使い、4 次元の端では、位相の圏でフリードマン（1982）が成り立つことを、微分の圏でドナルドソン（1987）が成り立たない例を示した。本稿は、一般の位置にある a 次元と b 次元が交わる次元 a＋b−n を、表と乱数の三角形・四面体で数える。新しい定理は主張しない。 第一に、円板が自分と交わる次元は 4−n で、5 次元以上では負、4 次元でだけ 0 になる——円板と P（2＋p−n）、円板と Q（2＋q−n）と合わせた三つがそろって 0 になるのは、n＝2〜12 の分け方 36 通りのうち (n, p, q)＝(4, 2, 2) だけだった。三つがそろって負になるのは p と q が 3 以上の 16 通りで、最小の n は 6 である（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。乱数の三角形二つは、R^4 では点で交わり、R^5 では交わらない——400000 組ずつで、交わる割合は R^3 で 0.279247、R^4 で 0.055670、R^5 と R^6 で 0 だった。R^5 と R^6 に植えた交点は 20000 組ずつすべて見つけたので、0 は見落としではない（第3節）。 第三に、2 次元と 3 次元は、R^5 でちょうど点で交わる——乱数の三角形と四面体の交わる割合は R^5 で 0.024450、R^6 で 0 だった。5 次元の (2, 3) の分け方では、円板は自分とは交わらないが、3 次元の Q とは点で交わる（第3節）。 第四に、曲がった円板は、R^3 で線、R^4 で点、R^5 で空の交わりを持つ——三角形 1152 枚に分けた同じ円板を置くと、頂点を共有しない 656443 組のうち交わる組は R^3 で 253、R^4 で 3、R^5 で 0 だった（第4節）。 第五に、R^4 の交点の符号は正と負がほぼ半々である——乱数の三角形二つの交点 22268 のうち正の割合は 0.504221 で、技法が消すのは符号の逆な二点の組である（第3節）。 第六に、分離子は、円板の次元 2 が中間の次元 n/2 に届くかである——交わらせる二つの次元の和が点になる次元を決め、円と円板は 3、円板と円板は 4、円板と 3 次元は 5 である（第5節）。 キーワード：ホイットニーの技法、一般の位置、h-同境定理、自己交差、交わりの次元、乱数の三角形。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理を主張しない——一般の位置で a 次元と b 次元が a＋b−n 次元で交わること、ホイットニー（1944）の技法、h-同境定理（スメイル 1962・端の次元が 5 以上で単連結）、4 次元の端で位相の h-同境定理が成り立つこと（フリードマン 1982）と微分では成り立たない例があること（ドナルドソン 1987）は、いずれも既知である。4 次元で定理が成り立たないことを、この数え上げから導かない——数えるのは、証明に使う円板がどの次元で自分や球面と交わるかまでである。技法の細部に立ち入らない——円板の枠、基本群の条件、4 次元で円板の代わりに使われる構成、5 次元の (2, 3) の分け方で円板と Q の点を越える議論は扱わない。交わる組は交点の数ではない——曲がった円板で数えたのは交わる三角形の組の数で、一つの交点を複数の組が数えることがある。乱数の形を限る——三角形と四面体の頂点は単位立方体の一様乱数、円板は正弦波三つの重ね合わせだけを使った。既刊との関係：論文1003 の射程注記は、4 次元の Θ の値を使わない理由として、4 次元は h-同境定理の範囲の外にあるとだけ書いた——本稿はその席に座り、範囲の境で証明に使う円板が何次元で交わるかを数える（先客なし）。論文254 は、円と円板が一般の位置で交わる次元 2＋1−n を数え、4 次元で結び目がほどけることを示した——ここでは、円板と円板の 2＋2−n を数え、点になる次元が 3 から 4 に上がることを確かめる。論文279 は、乱歩の道二本が交わる次元 2＋2−d を数え、4 次元より上で自分を避ける代価が消えることを示した——ここでは、同じ 2＋2 を、交点を消す円板の自己交差として数える。論文158 は、n 次元多様体の滑らかな埋め込みの次元 2n（ホイットニー）を並べ、n＝2 で 4 と書いた——ここでは、その 4 で 2 次元の円板が自分と点で交わり、5 で交わらないことを乱数で数える。論文08 は、4 次元の位相的ポアンカレ予想をフリードマンの定理として引き、エキゾチック $\mathbb{R}^4$ はフリードマンとドナルドソンの結果から従うと書いた——ここでは、その二人の結果が分かれる 4 次元の端で、円板の交わりが点になることを数える。加えたのは、円板と二つの球面の三つの交わりの次元を n＝2〜12 のすべての分け方で並べ、そろって点になるのが (4, 2, 2) だけであることを示したこと、乱数の三角形・四面体の交わる割合を R³〜R⁶ で数え、植えた交点で見落としでないことを確かめたこと、同じ曲がった円板を R³・R⁴・R⁵ に置いて自己交差の組を数えたこと、254・279 の数え上げと並べ、交わらせる次元の和が境を決めることを示したことである。

1. 記法と問い

設定：n 次元の多様体 M の中で、p 次元の P と q 次元の Q（$p+q=n$）が、符号の逆な二点 x・y で交わるとする。P の中で x と y を結ぶ弧と、Q の中で結ぶ弧を合わせた円を、2 次元の円板 D で埋める。D が自分と交わらず、内部が P とも Q とも交わらなければ、Q を D に沿って押して x・y を同時に消せる（ホイットニーの技法）。一般の位置では、a 次元と b 次元の小片は $a+b-n$ 次元で交わり、これが負なら交わらない。

$$\dim(D\cap D)=4-n,\qquad \dim(D\cap P)=2+p-n,\qquad \dim(D\cap Q)=2+q-n$$

問い：三つの交わりは、どの次元のどの分け方でそろって消え、どこでそろって点になるか。乱数の小片を置くと、数え上げどおりに交わるか。

2. 交わりの次元の表

計算 2.1：$n = 2$〜12 で $p \le q$ の分け方 36 通りを並べた（一部を示す）。

n	(p, q)	$D \cap D$	$D \cap P$	$D \cap Q$
3	$(1, 2)$	1	0	1
4	$(2, 2)$	0	0	0
5	$(2, 3)$	-1	-1	0
6	$(3, 3)$	-2	-1	-1
7	$(3, 4)$	-3	-2	-1
8	$(4, 4)$	-4	-2	-2

> **観察 2.2**
>
> 円板が自分と交わる次元 $4 - n$ は、5 次元以上ですべて負になり、4 次元でだけ 0 になる。三つがそろって 0 になるのは 36 通りのうち $(n, p, q) = (4, 2, 2)$ だけで、三つがそろって負になるのは $p \ge 3$ かつ $q \ge 3$ の 16 通り、その最小の n は 6 である——5 次元の $(2, 3)$ では、円板は自分とも P とも交わらないが、Q とは点で交わる。4 次元の $(2, 2)$ では、円板の次元 2 が中間の次元 $n/2 = 2$ に等しく、三つの交わりがそろって点になる。

3. 乱数の小片で数える

計算 3.1：頂点を単位立方体の一様乱数に取った三角形二つを 400000 組ずつ置き、$a_0 + U s = b_0 + V t$ を解いて、解が両方の三角形の中に入るかで交わりを判定した（R^3 では辺が相手の三角形を貫くかで判定）。

空間	$2+2-n$	交わる組	割合
R^3	1	111699	0.279247
R^4	0	22268	0.055670
R^5	-1	0	0.000000
R^6	-2	0	0.000000

計算 3.2：R^5 と R^6 で、交わるように作った三角形二つを 20000 組ずつ植え、同じ判定にかけた。見つけた組はどちらも 20000、残差の最大は 7.114×10^{-14} と 1.273×10^{-14} だった。R^4 の交点 22268 の符号（四つの辺の行列式の符号）は正 11228・負 11040 だった。

計算 3.3：三角形と四面体（$2+3-n$）を同じく 400000 組ずつ置いた。交わる組は R^5 で 9780（割合 0.024450）、R^6 で 0 だった。

> **観察 3.4**
>
> これが本稿の芯である。乱数の三角形二つは、$\mathbb{R}^4$ では点で交わり、$\mathbb{R}^5$ では交わらない。交わる割合は R^3 で 0.279247、R^4 で 0.055670、R^5・R^6 で 0 で、植えた交点はすべて見つけた。R^4 の交点の正の割合は 0.504221、三角形と四面体は R^5 で 0.024450 の割合で交わった——数え上げの $2+2-n$ と $2+3-n$ が 0 になる次元で、交わりが正の割合で現れ、負になる次元で消えた。符号は正と負がほぼ半々で、技法が一度に消すのは符号の逆な二点である。

4. 曲がった円板の自己交差

計算 4.1：正方形を 24×24 に分けた三角形 1152 枚の円板を、正弦波三つの重ね合わせで R^3・R^4・R^5 に置き（同じ乱数の係数）、頂点を共有しない 656443 組のうち交わる組を数えた。

空間	円板の自己交差の次元 $4-n$	交わる三角形の組
R^3	1	253
R^4	0	3
R^5	-1	0

> **観察 4.2**
>
> 曲がった円板は、R³ で線、R⁴ で点、R⁵ で空の自己交差を持つ。交わる組は R^3 の 253 から R^4 の 3 に減り、R^5 で 0 になった——計算 2.1 の次元では、R^3 の自己交差は線、R^4 では点、R^5 では空である。数えたのは組の数で、交点の数ではない。

5. 数え方の比較と分離子

計算 5.1：交わらせる二つの次元 a・b ごとに、$a+b-n=0$ になる n を並べた。

二つ	点で交わる n	既刊
円と円板（$1+2$）	**3**	論文254（結び目は 4 次元でほどける）
円板と円板（$2+2$）	**4**	本稿・論文279（乱歩の道二本）
円板と 3 次元（$2+3$）	**5**	本稿（5 次元の $(2,3)$ の分け方）

> **観察 5.2**
>
> 分離子は、円板の次元 2 が中間の次元 n/2 に届くかである。偶数の $n=2$〜12 で、円板の次元 2 が中間の次元 $n/2$ に等しいのは $n=4$ だけで、そこでは円板と二つの球面が同じ次元になり、三つの交わりがそろって点になる——254 の円と円板は 3 次元で点になり、4 次元で消える。本稿の円板と円板は 4 次元で点になり、5 次元で消える。境を決めているのは交わらせる二つの次元の和で、同じ数え上げが、結び目（3）、乱歩と交点を消す円板（4）、円板と 3 次元の小片（5）に現れる。

6. 言わないこと

> **観察 6.1**
>
> 言わないこと。4 次元で微分の h-同境定理が成り立たないことを、この数え上げから導いたとは言わない。数えたのは、証明に使う円板がどの次元で交わるかまでである——円板の枠、基本群の条件、4 次元で円板の代わりに使われる構成、5 次元の $(2,3)$ で Q との点を越える議論には立ち入らない。曲がった円板の交わる組を交点の数とは言わない。

7. 点呼と結び

1. 円板の自己交差 $4-n$（計算 2.1）：5 次元以上で負、4 次元でだけ 0。
2. 三つがそろって 0 は 36 通りのうち $(4,2,2)$ だけ（観察 2.2）：そろって負は 16 通り、最小 $n=6$。
3. 三角形二つの交わる割合 0.055670（R^4）と 0（R^5）（計算 3.1）：本稿の芯。
4. 植えた 20000 組をすべて見つけた（計算 3.2）：0 は見落としではない。
5. R^4 の交点の正の割合 0.504221（計算 3.2）：符号はほぼ半々。
6. 三角形と四面体 0.024450（R^5）と 0（R^6）（計算 3.3）：$2+3-n$ の境。
7. 曲がった円板の交わる組 $253\cdot 3\cdot 0$（計算 4.1）：線・点・空。
8. 点で交わる n は $1+2$ で 3、$2+2$ で 4、$2+3$ で 5（計算 5.1）：論文254・279。
9. 円板の次元 2 が中間の次元に届くか（観察 5.2）：分離子・論文1003・158・08。

結び：交点を消す円板は、5 次元以上では自分と交わらず、4 次元でだけ点で交わる。ホイットニーの技法の円板が自分と交わる次元は 4−n で、円板と二つの球面を合わせた三つの交わりがそろって点になるのは、n＝2〜12 の 36 通りのうち 4 次元の (2, 2) だけだった——乱数の三角形二つは R⁴ で 0.055670 の割合で点で交わり、R⁵ と R⁶ では植えた交点をすべて見つける判定で 0 だった。同じ曲がった円板の自己交差の組は R³ で 253、R⁴ で 3、R⁵ で 0 である。分離子は、円板の次元 2 が中間の次元 n/2 に届くかである。既刊との位置——論文254 は円と円板で 3 次元を、論文279 は乱歩の道二本で 4 次元を、論文158 はホイットニーの埋め込みの 2n を数えた。ここでは、論文1003 が h-同境定理の範囲の外とだけ書いた 4 次元で、証明に使う円板の交わりがそろって点になることを数え、論文08 が引いたフリードマンとドナルドソンの結果が分かれる場所の次元の勘定を置いた。正直に言えば——4 次元で定理が成り立たないことをこの数え上げから導いてはおらず、技法の細部や 4 次元で円板の代わりに使われる構成には立ち入っていない。乱数の形は単位立方体の頂点と正弦波三つの円板だけである。

参考文献

1. Donaldson, S. K. (1987). Irrationality and the h-cobordism conjecture. *Journal of Differential Geometry*.
2. Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*.
3. Smale, S. (1962). On the structure of manifolds. *American Journal of Mathematics*.
4. Whitney, H. (1944). The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space. *Annals of Mathematics*.
5. 山岸勇輝 (2026). 『n=3唯一性定理とホップファイブレーションに基づく 4次元ポアンカレ予想とエキゾチック構造の構造的解釈』[論文08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
6. 山岸勇輝 (2026). 『内から測れるものは、必ずどこかに住める』[論文158]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092143

7. 山岸勇輝 (2026). 『「四次元では結び目がほどける」も、一つの現象ではない』[論文254]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22162025

8. 山岸勇輝 (2026). 『鎖の指数を変えたのは「自分を避ける」ことだけであり、四次元より上ではその代価が消える』[論文279]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22170222

9. 山岸勇輝 (2026). 『ポアンカレ予想は圏ごとに別の問いで、PL でも微分でも開いたままの次元は 4 だけである』[論文1003]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22823587

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)