誘導放出を抜くと放射はウィーンの式になり、A と B の比の 8π だけが偏光の数を運ぶ

— アインシュタインの帳簿で誘導放出を外すと、釣り合う放射のプランクとの比は 1 − exp(−hv/kT) になる — 分離子は、偏光の数が A と B の比に入るか、誘導放出と自発放出の比に入るか — [論文1005]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

アインシュタイン（1917）は、二つの準位のあいだの吸収・誘導放出・自発放出の速さを B12 u N1・B21 u N2・A N2 と置き、熱平衡で釣り合って準位の数がボルツマン分布になるなら、放射 u はプランクの式で、A と B21 の比は $8\pi h\nu^3/c^3$ になることを示した。本稿は、この帳簿から誘導放出を外したとき何が起きるか、そして係数の 8π のどこに偏光の数が入るかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。誘導放出を外すと、釣り合う放射はウィーンの式になる——プランクとの比は $1-\exp(-x)$（$x=h\nu/kT$）で、x＝0.1 で **0.095163**、x＝1 で **0.632121**、x＝10 で **0.999955** だった。1 パーセント以内に入るのは x が **4.605170** より大きいとき、300 K なら波長 10.414 μm より短いときだけである。欠ける割合 exp(−x) は、プランクの放射の中で誘導放出が放出の全体に占める取り分と同じだった（第4節）。 第二に、8π は偏光の数 2 と k 空間の単位球の面積 4π の積である——周期箱の整数点を数えると、殻の点の数は単位球の面積に比例し（d＝3 で比 **0.994578**）、波の向きに垂直な向きの数は d−1 だった。偏光 2 と 4π の積は **25.132741** で 8π と一致した（第2節）。 第三に、帳簿は実際にボルツマン分布へ落ち着く——プランクの放射の中で速さの式を時間で積分すると、縮退の比 1 と 3、x＝0.5〜10 の 8 通りとも、準位の数の比がボルツマン分布と相対差 7.077×10^{-14} 以内に落ち着いた（第3節）。 第四に、誘導放出と自発放出の比は占有数 1/(exp(x) − 1) で、四つの場面のあいだで 45.453 桁動く——太陽の表面（5772 K）の 500 nm で **0.006884**、室温の 500 nm で 2.203651×10^{-42}、室温の 1 GHz で 6.250486×10^{3} だった。比が 1 になる波長は 300 K で **69.1905 μm** である（第5節）。 第五に、誘導放出が吸収に勝つのは、温度が負のときだけである——632.8 nm で上の準位の数が下の 2 倍になる状態は T＝**−32802.090** K で、正の温度では下の準位が多く吸収が勝つ（第6節）。 第六に、分離子は、偏光の数が A と B の比に入るか、誘導放出と自発放出の比に入るかである——A と B の比の係数は d 次元で (d−1) 倍の単位球の面積（$2\pi\cdot8\pi\cdot6\pi^2\cdot$ **105.275780**）で偏光の数を運ぶ。一方、格子で数えたモードで組んだ放射の中の誘導／自発の比は、偏光を d−1 本にしても 1 本にしても同じだった（第7節）。 キーワード：誘導放出、自発放出、アインシュタイン係数、ウィーンの式、偏光の数、負の温度。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——アインシュタインの A・B 係数の関係（1917）、プランクの放射則、ウィーンの放射の式、放射の占有数が 1/(exp(x) − 1) であること、反転分布を負の温度で表せることは、いずれも既知である。誘導放出が要る理由を因果で言わない——言うのは、帳簿から誘導放出を外すと釣り合う放射がプランクではなくウィーンの式になる、という事実だけである。次元が 3 でない世界を主張しない——(d−1) 倍の単位球の面積は式の値で、そのような世界が在るとは言わない。レーザーを扱わない——装置、線幅、ポンプ、実在の原子の縮退の値は入れない。632.8 nm は波長の例として使っただけである。速さの式の数値を限る——A を 10^6 毎秒に置き、縮退の比 1 と 3、x の 4 点だけを積分した。既刊との関係：論文902 の射程注記は、偏光の数を係数から外し、指数を当てる積分では入れず、3 次元の係数を確かめるときだけ 2 を入れたと書いた——本稿はその席に座り、偏光の数を A と B の比の係数に戻して、それが誘導放出と自発放出の比には入らないことを数える（先客なし）。論文902 は、黒体の放射密度の係数の 4π が立体角ではなく k 空間の単位球の面積であることを示した——ここでは、その 4π に偏光の 2 を掛けたものが A と B の比の 8π であることを数える。論文265 は、低温比熱の T^3 の 3 が状態密度の次元から来ることを示した——ここでは、同じ状態密度が偏光の数と合わさって A と B の比に入ることを数える。論文403 は、負の温度が正の温度のすべてより熱いことを示した——ここでは、誘導放出が吸収に勝つ反転分布が負の温度であることを数える。加えたのは、誘導放出を外したときのウィーンとプランクの比を数え、1 パーセント以内に入る範囲を出したこと、周期箱の整数点で殻の数と偏光の数を数え、8π を 2 と 4π に分けたこと、速さの式を積分してボルツマン分布に落ち着くことを確かめたこと、誘導／自発の比を四つの場面で数えたこと、偏光の数が A と B の比には入り、誘導／自発の比には入らないことを格子のモードで確かめたことである。

1. 記法と問い

設定：下の準位 1（縮退 g_1・数 N_1）と上の準位 2（縮退 g_2・数 N_2）のあいだの振動数 ν の遷移を考える。周波数あたりの放射のエネルギー密度を u とし、単位時間あたりの遷移を、吸収 $B_{12}uN_1$、誘導放出 $B_{21}uN_2$、自発放出 AN_2 と置く。熱平衡で $B_{12}uN_1 = B_{21}uN_2 + AN_2$ が成り立ち、$N_2/N_1 = (g_2/g_1)e^{-x}$（$x = h\nu/kT$）なら、次が要る。

$$u = \frac{A/B_{21}}{(g_1B_{12}/g_2B_{21})\,e^{x} - 1}, \qquad g_1B_{12} = g_2B_{21}, \qquad \frac{A}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

問い：この帳簿から誘導放出を外すと、釣り合う放射はどうなるか。係数の 8π のどこに偏光の数が入り、どこに入らないか。

2. モードの数え上げと 8π

計算 2.1：周期箱の整数ベクトル n を $|n| \le R$ で数え、球の体積 V_dR^d と、殻 $R-1 < |n| \le R$ の数を単位球の面積 $S_{d-1}(R-1/2)^{d-1}$ と比べた。

d	R	球の中の点	$V_d R^d$ との比	殻の点と $S_{d-1}(R-1/2)^{d-1}$ の比
2	400	502625	0.999941	1.002338
3	120	7236577	0.999772	0.994578
4	50	30849449	1.000225	1.002939

計算 2.2：乱数の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直な向きの空間の次元（射影 $I - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathsf{T}}/|\boldsymbol{k}|^2$ の階数）は、$d = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ で $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ だった。偏光 2 と $S_2 = 4\pi$ の積は 25.132741 で、8π と一致した。

> **観察 2.3**
>
> 8π は、偏光の数 2 と k 空間の単位球の面積 4π の積である。殻の点の数は単位球の面積に比例し、一つの波数に横波の偏光が $d-1$ 本ある——周波数あたりのモードの数は $(d-1) S_{d-1} \nu^{d-1}/c^d$ で、$d=3$ では $8\pi\nu^2/c^3$ になる。

3. 速さの式を積分する

計算 3.1：$\nu = c/500\text{nm}$、$A = 10^6$ 毎秒、$A/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3$、$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ とし、プランクの放射の中で $N_1 = 1 \cdot N_2 = 0$ から時間で積分した。

g_2/g_1	x	積分した N_2/N_1	ボルツマン	相対差
1	0.5	0.606530660	0.606530660	1.318×10^{-14}
1	1.0	0.367879441	0.367879441	7.077×10^{-14}
1	10.0	0.000045400	0.000045400	5.403×10^{-14}
3	0.5	1.819591979	1.819591979	5.735×10^{-14}
3	10.0	0.000136200	0.000136200	3.483×10^{-14}

> **観察 3.2**
>
> 帳簿は実際にボルツマン分布へ落ち着く。8 通り（表はその一部）の相対差の最大は 7.077×10^{-14} だった——誘導放出を入れ、$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ と $A/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3$ を置けば、プランクの放射と準位の数が互いに矛盾しない。

4. 誘導放出を外す

計算 4.1：$B_{21} = 0$ として釣り合い $BuN_1 = AN_2$ に $N_2/N_1 = e^{-x}$ を入れると、$u = (A/B)e^{-x}$（ウィーンの放射の式）になる。プランクの式との比を出した。

x	ウィーン/プランク	$1 - e^{-x}$
0.1	0.095163	0.095163
1.0	0.632121	0.632121
3.0	0.950213	0.950213
10.0	0.999955	0.999955

> **観察 4.2**
>
> これが本稿の芯である。誘導放出を外すと、釣り合う放射はウィーンの式になる。ウィーンとプランクの比は $1 - e^{-x}$ で、$x = 0.1$ では **0.095163** しかなく、1 パーセント以内に入るのは $x > 4.605170$（300 K なら波長 10.414 μm より短い）ときだけである——欠ける割合 e^{-x} は、プランクの放射の中で誘導放出が放出の全体に占める取り分と同じで、$x = 0.1$ で **0.904837**、$x = 1$ で **0.367879** だった。$x = 4.6$ では 1 パーセントより外れ、$x = 4.7$ では内に入った。

5. 誘導放出と自発放出の比

計算 5.1：誘導放出と自発放出の比 $B_{21}u/A = 1/(e^x - 1)$ を四つの場面で出した。

場面	x	誘導／自発
太陽の表面 5772 K・500 nm	4.985367	6.884339×10^{-3}
室温 300 K・500 nm	95.918459	2.203651×10^{-42}
室温 300 K・10 μm	4.795923	8.332221×10^{-3}
室温 300 K・1 GHz	0.000160	6.250486×10^{3}

> **観察 5.2**
>
> 誘導放出と自発放出の比は占有数で、四つの場面のあいだで 45.453 桁動く。比が 1 になるのは $x = \ln 2 = 0.693147$ で、波長は 300 K で 69.1905 μm、5772 K で 3.5962 μm である——室温の可視光では比が 2.203651×10^{-42} で自発放出が勝ち、室温の 1 GHz では比が 6.250486×10^{3} で誘導放出が勝つ。

6. 反転分布と負の温度

計算 6.1：632.8 nm で $h\nu/k = 22736.676$ K。$g_2 = g_1$ で $N_2/N_1 = 2$ となる温度は $T = -h\nu/(k \ln 2) = -32802.090$ K で、$e^{-h\nu/kT}$ に戻すと 2 になった。誘導放出から吸収を引いた正味は $N_2 - N_1$ に比例し、$N_2/N_1 = 0.5 \cdot 1 \cdot 2$ で $-0.5N_1 \cdot 0 \cdot +1.0N_1$ だった。

> **観察 6.2**
>
> 誘導放出が吸収に勝つのは、温度が負のときだけである。正の温度（例えば 10000 K）では $N_2 < N_1$ で吸収が勝ち、$N_2 > N_1$ の反転分布は負の温度 -32802.090 K に当たる——正の温度の熱平衡では、増幅は起きない。

7. d 次元と分離子

計算 7.1：A/B の係数 $(d-1)S_{d-1}$（$h\nu^d/c^d$ に掛かる）を並べ、格子で数えたモードから $x = 2$ の放射を組んで、誘導／自発の比を偏光 $d-1$ 本と 1 本で比べた。

d	偏光	S_{d-1}	A/B の係数	格子の比（$d-1$ 本・1 本）
2	1	6.283185	6.283185	0.156883505・0.156883505
3	2	12.566371	25.132741	0.155669064・0.155669064
4	3	19.739209	59.217626	0.156977574・0.156977574
5	4	26.318945	105.275780	（格子は数えていない）

> **観察 7.2**
>
> 分離子は、偏光の数が A と B の比に入るか、誘導放出と自発放出の比に入るかである。A と B の比の係数は偏光の数 $d-1$ に比例する。格子で組んだ放射の中の誘導／自発の比は、偏光を $d-1$ 本にしても 1 本にしても同じで、占有数 $1/(e^2-1)=0.156517643$ と殻の数え上げの誤差（比 1.002338・0.994578・1.002939）の範囲で一致した——偏光の数は放射 u と A/B の両方に同じだけ掛かるので、その比である誘導／自発には残らない。偏光の数を運ぶのは、A と B の比の 8π のほうである。

8. 点呼と結び

1. ウィーン/プランク $=1-e^{-x}$（**0.095163・0.632121・0.999955**）（計算 4.1）：本稿の芯。
2. 1 パーセント以内は $x>4.605170$（観察 4.2）：300 K で 10.414 μm より短い波長だけ。
3. $8\pi=2\times4\pi=25.132741$（計算 2.2）：偏光の数と k 空間の単位球の面積。
4. 殻の点の比 **0.994578**（$d=3$）（計算 2.1）：モードは単位球の面積に比例する。
5. 積分した N_2/N_1 の相対差 7.077×10^{-14} 以内（観察 3.2）：帳簿はボルツマン分布へ落ち着く。
6. 誘導／自発は太陽の 500 nm で 6.884339×10^{-3}、室温の 1 GHz で 6.250486×10^{3}（計算 5.1）：占有数。
7. 比が 1 の波長 **69.1905** μm（300 K）（観察 5.2）：$x=\ln 2$。
8. 反転分布の温度 **−32802.090** K（計算 6.1）：増幅は負の温度。
9. A/B の係数 $(d-1)S_{d-1}$ と、偏光によらない格子の比（計算 7.1）：分離子・論文902・265・403。

結び：誘導放出を抜くと放射はウィーンの式になり、A と B の比の 8π だけが偏光の数を運ぶ。アインシュタインの帳簿から誘導放出を外すと、釣り合う放射のプランクとの比は $1-\exp(-x)$ で、$x=0.1$ で 0.095163、1 パーセント以内に入るのは x が 4.605170 より大きいときだけだった——誘導放出を入れた帳簿は、速さの式の積分で 8 通りともボルツマン分布へ相対差 7.077×10^{-14} 以内に落ち着いた。8π は偏光の数 2 と k 空間の単位球の面積 4π の積で、d 次元では $(d-1)$ 倍の単位球の面積になる——誘導放出と自発放出の比は占有数で、太陽の 500 nm

で **0.006884**、室温の **500 nm** で **2.203651×10^{-42}**、格子で組んだ放射では偏光を **d−1** 本にしても **1** 本にしても変わらなかった。反転分布は負の温度で、**632.8 nm** で上が下の **2** 倍なら **−32802.090 K** である。分離子は、偏光の数が **A** と **B** の比に入るか、誘導放出と自発放出の比に入るかである。既刊との位置――論文**902** は係数の **4π** を **k** 空間の単位球の面積と読み、偏光の数を係数から外した。論文**265** は状態密度の次元を、論文**403** は負の温度が正の温度より熱いことを示した。ここでは、外された偏光の数を **A** と **B** の比に戻し、それが誘導／自発の比に残らないことを数えた。正直に言えば――誘導放出が要る理由を因果では言っておらず、次元が **3** でない世界もレーザーの装置も扱っていない。速さの式は **A** と縮退と **x** を限って積分しただけである。

参考文献

1. Einstein, A. (1917). Zur Quantentheorie der Strahlung. *Physikalische Zeitschrift*.
2. Planck, M. (1901). Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*.
3. Wien, W. (1896). Ueber die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers. *Annalen der Physik*.
4. 山岸勇輝 (2026).『低温比熱で二つの模型を分けたのは、量子化ではなく状態密度である』[論文265]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169749
5. 山岸勇輝 (2026).『温度の大小の順は、熱さの順ではない』[論文403]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699405
6. 山岸勇輝 (2026).『同じ c^3 でも、黒体放射の 3 は次元を数え、プランク長の 3 は数えない』[論文902]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22800314

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)