体積の積は束が在るかを見分けず、ミルナーの 7 次元球面は k^2-1 を 7 で割った余りで見分ける

— 2n−1 次元球面の体積は、n−1 次元球面と半径 1/2 の n 次元球面の体積の積にどの n でも等しいが、束が在るのは n＝1・2・4・8 だけで、S^4 の上の S^3 束は k^2-1 が 7 で割り切れないと球面と微分同相でない — 分離子は、数えているのが体積か、位相の不変量か — [論文1008]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ホップ束 $S^1\to S^3\to S^2$ では、全空間 S^3 の体積 $2\pi^2$ が、半径 1/2 の底空間 S^2 の面積 π と繊維 S^1 の長さ 2π の積になる。本稿は、同じ形の体積の積を他の次元で数え、束が在る次元と比べ、束の在る次元の一つ n＝4 で、S^4 の上の S^3 束からミルナー（1956）の 7 次元球面を見分ける不変量を数える。新しい定理は主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。体積の積は、束の無い次元でも成り立つ——2n−1 次元球面の体積と、n−1 次元球面と半径 1/2 の n 次元球面の体積の積は、n＝1〜12 のすべてで相対差 4.505×10^{-16} 以内で一致した。束の無い n＝3 でも $31.006277=12.566371\times2.467401$ である（第3節）。 第二に、束が在る次元を数で当てるのは、体積ではなくベクトル場の数である——n−1 次元球面の独立なベクトル場の数を与えるラドン＝フルヴィッツ数が n に等しくなるのは、n＝1〜64 で 1・2・4・8 だけで、ホップ束が在る四つの次元（アダムズ 1960）と同じだった（第4節）。 第三に、四元数のホップ写像 $S^7\to S^4$ は、乱数の点で確かめても束になっている——200000 点で、像は単位球面に乗り、右から単位四元数を掛けても像は変わらず（差 7.772×10^{-16}）、像の分布は一様な S^4 とコルモゴロフ＝スミルノフ距離 0.001281 だった。共役を落とすと、繊維に沿って像が 1.956018 まで動いた（第2節）。 第四に、ミルナーの束 M_k は、k^2-1 を 7 で割った余りで見分ける——h＋j＝1 の S^4 上の S^3 束はどれも S^7 と同相で、第一ポントリャーギン類 ±2k と符号数 1 から、不変量 λ は $2(2k)^2-1$ と k^2-1 の 7 の余りが奇数 k＝−49〜49 のすべてで一致した。余りは 0・1・3・6 の 4 通りで、0 でなければ S^7 と微分同相でない（第5節）。 第五に、四元数のホップ束は余り 0 の側にある——余りが 0 になるのは k を 7 で割って 1 か 6 余るときで、k＝1〜27 の奇数では 1・13・15・27、k＝1 が四元数のホップ束である。残る 10 個は S^7 と微分同相でないと分かる（第5節）。 第六に、分離子は、数えているのが体積か、位相の不変量か——体積の積はガンマ関数の倍数公式で、どの n でも成り立つので束の有無を見分けない。束の有無はベクトル場やホップ不変量が、束の微分の違いは λ が見分ける（第6節）。 キーワード：ホップ束、四元数、異種球面、ミルナーの不変量、ラドン＝フルヴィッツ数、倍数公式。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理を主張しない——球面の体積の式、ガンマ関数の倍数公式、ホップ束（ホップ 1931・1935）、ホップ不変量 1 の写像が 1・2・4・8 の次元にしかないこと（アダムズ 1960）、球面の独立なベクトル場の数（アダムズ 1962・ラドン＝フルヴィッツ数）、ミルナー（1956）の束と不変量 λ、M_k が S^7 と同相であること（二つの臨界点のモース関数）は、いずれも既知である。書き写した事実を計算したとは言わない——ホップ束が四つしかないこと、M_k が S^7 と同相であること、第一ポントリャーギン類が $\pm 2(h-j)$ であること、λ が 0 でなければ微分同相でないことは書き写しで、計算したのは体積の積、ラドン＝フルヴィッツ数、ホップ写像の乱数の点、λ の余りである。余りが 0 なら球面だとは言わない——λ が 0 でなければ微分同相でない、の一方向だけを使う。異種 7 次元球面を数え上げない——28 個の微分構造のうち、この束で何個が作れるかは扱わない。λ の 7 と、論文1003 で数えた 28 の約数 7 の関係も扱わない。分解を誤りとは言わない——束の在る次元では、体積の積は本物の分解である。言うのは、体積の数だけでは束の有無が分からないことである。既刊との関係：論文08 は、ホップ束 $S^1 \to S^3 \to S^2$ で底空間の面積と繊維の長さの積が全空間の体積になることを示した——ここでは、同じ形の体積の積が束の無い次元でも成り立つことを数える。論文45 は、その分解が半径をどう取っても成り立つことを示した——ここでは、次元をどう取っても体積の積が成り立つことを数える。論文114 は、ホップ束が四本しかないことをアダムズの定理として引いた——ここでは、その四つの次元をラドン＝フルヴィッツ数で数え直す。論文115 は、平行化可能な球面が S^0・S^1・S^3・S^7 だけであることを引いた——ここでは、S^3 を繊維に持つ四元数の束が一様に S^4 を覆うことを乱数で確かめる。論文1003 は、ミルナーの異種 7 次元球面を既知として三つの圏の表に置き、bP の位数 28 を数えた——ここでは、ミルナーの束の不変量が k^2-1 の 7 の余りになることを数える。加えたのは、体積の積を $n=1$〜12 で数え、束の無い次元でも成り立つことを示したこと、ラドン＝フルヴィッツ数で束の在る次元を数え直したこと、四元数のホップ写像を乱数の点で確かめ、共役を落とした対照で判定を試したこと、ミルナーの λ の余りを奇数 k で数え、余りの種類と 0 になる k を出したことである。

1. 記法と問い

設定：半径 R の k 次元球面の体積を $\mathrm{Vol}(S^k_R) = 2\pi^{(k+1)/2} R^k / \Gamma((k+1)/2)$ と書く。ホップ束 $S^{n-1} \to S^{2n-1} \to S^n$ は $n = 1, 2, 4, 8$ にあり、$n=2$ は複素数、$n=4$ は四元数で $h(q_1, q_2) = (2q_1\bar{q}_2, |q_1|^2 - |q_2|^2)$ と書ける。ミルナーは、S^4 の上の S^3 束で $h + j = 1$ のものを M_k（$k = h - j$）と書き、それを境界に持つ 8 次元の円板束 W から次の不変量を作った。

$$\lambda(M_k) \equiv 2\,p_1^2[W] - \sigma(W) \pmod 7$$

問い：全空間の体積が底空間と繊維の体積の積になることは、束が在ることを見分けるか。束の在る $n=4$ で、同相な束を微分の違いで見分けるのは何か。

2. ホップ写像を乱数で確かめる

計算 2.1：$S^3 \subset \mathbb{C}^2$ と $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ の一様な乱数の点を 200000 個ずつ取り、ホップ写像の像を調べた。

量	複素 $S^3 \to S^2$	四元数 $S^7 \to S^4$
像の長さと 1 の差の最大	7.772×10^{-16}	5.551×10^{-16}
繊維に沿って動かした像の差の最大	8.882×10^{-16}	7.772×10^{-16}
一様な球面とのコルモゴロフ＝スミルノフ距離	0.001528	0.001281
最後の成分の平均二乗（一様なら）	0.333790（0.333333）	0.199815（0.2）

> **観察 2.2**
>
> 四元数のホップ写像 S⁷→S⁴ は、乱数の点で確かめても束になっている。像は単位球面に乗り、右から単位四元数を掛けても変わらず、分布は一様な S^4 と距離 **0.001281**（目安 $3/\sqrt{N} = 0.006708$）だった。最後の成分の平均四乗は 0.085611（一様なら $3/35 = 0.085714$）——対照に共役を落とした $2q_1q_2$ を使うと、繊維に沿って像が **1.956018** まで動いた。判定は、繊維に沿って変わる写像を変わると言う。

3. 体積の積

計算 3.1：$\mathrm{Vol}(S^{2n-1})$ と $\mathrm{Vol}(S^{n-1}) \cdot \mathrm{Vol}(S^n_{1/2})$ を $n = 1$〜12 で比べた（一部を示す）。

n	束	$\mathrm{Vol}(S^{2n-1})$	$\mathrm{Vol}(S^{n-1})$	$\mathrm{Vol}(S^n_{1/2})$
1	在る	6.283185	2.000000	3.141593
2	在る	19.739209	6.283185	3.141593
3	無い	31.006277	12.566371	2.467401
4	在る	32.469697	19.739209	1.644934
5	無い	25.501640	26.318945	0.968946
8	在る	3.765290	32.469697	0.115963

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。体積の積は、束の無い次元でも成り立つ。12 個の n すべてで積は相対差 4.505×10^{-16} 以内で一致し、束の無い $n=3\cdot5$ でも $\mathbf{31.006277\cdot25.501640}$ と成り立った——体積の積はガンマ関数の倍数公式 $\Gamma(n/2)\Gamma((n+1)/2)=2^{1-n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)$ の言い換えで、束が在るかどうかに触れない。$n=4$ の $\pi^4/3=2\pi^2\times\pi^2/6$ は、束の在る次元での本物の分解であると同時に、束の無い次元と同じ式の値でもある。

4. 束の在る次元を数え直す

計算 4.1：$n=2^{4a+b}\times$（奇数）、$0\le b\le3$ のとき、ラドン＝フルヴィッツ数を $\rho(n)=2^b+8a$ とし、S^{n-1} の独立なベクトル場の数 $\rho(n)-1$ を数えた。$n=1\sim16$ の $\rho(n)$ は $1,2,1,4,1,2,1,8,1,2,1,4,1,2,1,9$ だった。

> **観察 4.2**
>
> 束が在る次元を数で当てるのは、体積ではなくベクトル場の数である。$\rho(n)=n$（S^{n-1} が平行化可能）になるのは $n=1\sim64$ で $1\cdot2\cdot4\cdot8$ だけで、ホップ束の在る次元と同じだった——体積の積は $n=1\sim12$ の 12 個で成り立つが、束が在るのはそのうち 4 個である。

5. ミルナーの 7 次元球面

計算 5.1：$h+j=1$ の束では第一ポントリャーギン類が $\pm2k$、W の符号数が 1 なので、
$\lambda\equiv2(2k)^2-1\pmod 7$ を奇数 k で数えた。

k	p_1	$2p_1^2-1$	λ（mod 7）	k^2-1（mod 7）
1	2	7	0	0
3	6	71	1	1
5	10	199	3	3
7	14	391	6	6
9	18	647	3	3
11	22	967	1	1
13	26	1351	0	0
15	30	1799	0	0

観察 5.2

ミルナーの束 M_k は、k²−1 を 7 で割った余りで見分ける。$2(2k)^2-1$ と k^2-1 の 7 の余りは奇数 $k=-49$〜49 のすべてで一致し、余りは 0・1・3・6 の 4 通りだった。余りが 0 になるのは k を 7 で割って 1 か 6 余るときで、$k=1$〜27 の奇数では 1・13・15・27 である——$k=1$ は四元数のホップ束で余り 0。$k=1$〜27 の奇数 14 個のうち、余りが 0 でない 10 個は S^7 と同相なのに微分同相でないと分かる。向きを逆にすると余りは 0・1・4・6 になる。

6. 分離子と、言わないこと

観察 6.1

分離子は、数えているのが体積か、位相の不変量か。体積の積は倍数公式なので、どの n でも成り立ち、束の有無を見分けない——束の有無を見分けるのはベクトル場の数やホップ不変量で、同相な束の微分の違いを見分けるのは λ である。$n=4$ の S^7 は、体積では $\pi^4/3$ の一つの数だが、λ では 7 の余りで分かれる。

> **観察 6.2**
>
> 言わないこと。$\lambda \equiv 0$ なら S^7 と微分同相だとは言わず、28 個の微分構造のうちこの束で何個作れるかも扱わない——λ の 7 と 28 の約数の 7 の関係には立ち入らない。束の在る次元での体積の分解を誤りとは言わない。

7. 点呼と結び

1. 体積の積が $n = 1 \sim 12$ で相対差 4.505×10^{-16}（計算 3.1）：本稿の芯。束の無い次元でも成り立つ。
2. $n = 3$ で $31.006277 = 12.566371 \times 2.467401$（観察 3.2）：束は無い。
3. $\rho(n) = n$ は $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$ だけ（$n \le 64$）（計算 4.1）：束の在る次元。
4. 四元数のホップ写像の距離 0.001281 と対照の 1.956018（計算 2.1）：束になっている。
5. λ の余りは $0 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6$（計算 5.1）：$k^2 - 1$ の 7 の余り。
6. 余り 0 は $k = 1 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 27$（観察 5.2）：$k = 1$ はホップ束。
7. 体積か、位相の不変量か（観察 6.1）：分離子・論文08・45・114・115・1003。

結び：体積の積は束が在るかを見分けず、ミルナーの 7 次元球面は k^2-1 を 7 で割った余りで見分ける。$2n-1$ 次元球面の体積は、$n-1$ 次元球面と半径 1/2 の n 次元球面の体積の積に $n=1\sim12$ のすべてで等しく、束の無い $n=3$ でも 31.006277 だった——束が在る四つの次元 $1\cdot2\cdot4\cdot8$ を数で当てたのは、ラドン＝フルヴィッツ数のほうである。四元数のホップ写像は乱数の 200000 点で束になっていることを確かめ、その上のミルナーの束 M_k の不変量は k^2-1 の 7 の余りで $0\cdot1\cdot3\cdot6$ をとり、$k=1\sim27$ の奇数 14 個のうち 10 個が S^7 と同相なのに微分同相でないと分かった——四元数のホップ束 $k=1$ は余り 0 の側にある。分離子は、数えているのが体積か、位相の不変量かである。既刊との位置——論文08 と論文45 は $S^1\to S^3\to S^2$ の体積の分解を示し、論文114 と論文115 はホップ束と平行化可能な球面が四つしかないことを引き、論文1003 はミルナーの異種 7 次元球面を三つの圏の表に置いた。ここでは、体積の積がその四つの外でも成り立つことと、四つの一つの上でミルナーの束を分ける 7 の余りを数えた。正直に言えば——ホップ束が四つしかないこと、M_k が S^7 と同相であること、λ の式は書き写しで、余りが 0 なら球面だとは言っていない。

参考文献

1. Adams, J. F. (1960). On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Annals of Mathematics*.
2. Adams, J. F. (1962). Vector fields on spheres. *Annals of Mathematics*.
3. Hopf, H. (1931). Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Mathematische Annalen*.
4. Hopf, H. (1935). Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. *Fundamenta Mathematicae*.

5. Milnor, J. (1956). On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*.
6. 山岸勇輝 (2026). 『n=3唯一性定理とホップファイブレーションに基づく 4次元ポアンカレ予想とエキゾチック構造の構造的解釈』[論文08]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404419
7. 山岸勇輝 (2026). 『面積は、立体角ではない』[論文45]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602337
8. 山岸勇輝 (2026). 『「4次元らしさ」を担うのは誰か』[論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
9. 山岸勇輝 (2026). 『二本の階段』[論文115]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21967686
10. 山岸勇輝 (2026). 『ポアンカレ予想は圏ごとに別の問いで、PL でも微分でも開いたままの次元は 4 だけである』[論文1003]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22823587

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)