等しい質量の三体で、回る正三角形の乱れは一周期ごとに掛け算で、八の字の乱れは足し算で育つ

— 八の字の解は一周期に六回一直線に並ぶ振り付けで位置エネルギーの平均はエネルギーのちょうど 2 倍、ラウスの値 9 の正三角形は 4 周期で辺の比が崩れる — 分離子は、乱れの育ちが周期ごとの倍率で決まるか、周期ごとの増分で決まるか — [論文1009]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

三つの等しい質量が重力で動くとき、形を保ったまま回る正三角形（ラグランジュ 1772）と、三つが一本の八の字の曲線を追いかけあう解（ムーア 1993・シャンシネ＝モンゴメリ 2000）がある。本稿は、二つの解に同じ大きさの乱れを入れ、周期ごとの育ち方を数値積分で数える。あわせて、八の字の振り付け・一直線に並ぶ回数・ビリアルを確かめる。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、八の字の解は、一周期に六回一直線に並ぶ振り付けである——周期は **6.325914** で、体 1 の位置は 1/3 周期後の体 3、2/3 周期後の体 2 と差 1.370×10^{-8} で一致した（順番を逆にすると **1.940009** ずれる）。一周期に 6 回一直線に並び、三つの体が 2 回ずつ真ん中に来た（第2節）。 第二に、八の字では、位置エネルギーの平均がエネルギーのちょうど 2 倍になる——エネルギー **−1.287141992** に対して、一周期の平均は位置エネルギーが 2.000000 倍、運動エネルギーが −1.000000 倍で、慣性モーメントの二階微分 4E−2V の平均は -3.350×10^{-10} だった。慣性モーメントは **1.991310** から **2.000000** のあいだしか動かない（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。回る正三角形の乱れは、一周期ごとに掛け算で育つ——大きさ 10^{-8} の乱れは 1・2・3 周期で 2.9673×10^{1}・2.4732×10^{3}・2.1027×10^{5} 倍になり、一周期に **84.179** 倍だった。辺の長さの最大/最小 − 1 は 4 周期で 2.016355×10^{-1} になり、形が崩れた（第4節）。 第四に、八の字の乱れは、周期に比例して足し算で育つ——同じ乱れは 1・10・40 周期で 42.7・431.6・1721.1 倍で、向きによらない三辺の長さの差も 5.6・52.4・208.3 倍と、40 周期と 10 周期の比が **3.974215** だった。時間をずらしても差は縮まなかった（第4節）。 第五に、等しい質量の正三角形のラウスの値は 9 で、490 の制限三体の柵と同じ式である——$27(m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1)/(m_1+m_2+m_3)^2$ は等しい質量で **9.000000**、一つの質量を 0 にすると $27\mu(1-\mu)$ になり、質量比 24.9599357944 で 1.000000000 だった（第5節）。 第六に、分離子は、乱れの育ちが周期ごとの倍率で決まるか、周期ごとの増分で決まるか——同じ 10^{-8} の乱れが、正三角形では 4 周期で形を崩し、八の字では 40 周期で三辺の長さの差を 208.3 倍にしかしなかった（第6節）。 キーワード：三体問題、八の字解、振り付け、ラグランジュの正三角形解、ビリアル定理、乱れの成長。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ラグランジュの正三角形解、八の字解（ムーア 1993・シャンシネ＝モンゴメリ 2000）とその初期値、ビリアル定理、正三角形の安定の条件（ラウス 1875）は、いずれも既知である。八の字の安定を証明しない——言えるのは、一つの乱れで 40 周期のあいだ差が周期に比例して育ったことだけである。育ち方の理由を言わない——八の字の差は時間をずらしても縮まず、三辺の長さの差も比例して育ったが、なぜそうなるかは調べていない。ラウスの条件を導かない——27(m1m2＋m2m3＋m3m1)/(m1＋m2＋m3)² と 1 を比べる条件は書き写しで、計算したのはその値である。扱う三体を限る——等しい質量・平面の運動・乱れは一つの向きだけで、三つより多い体や三次元の運動は扱わない。既刊との関係：論文 1002 の射程注記は、正三角形の形が保たれる条件を論じず、回る正三角形は 2 周期だけ回したと書いた——本稿はその席に座り、等しい質量の正三角形の形が何周期で崩れるかを乱れの育ちで数え、八の字と比べる（先客なし）。論文1002 は、D 次元の重力で Ï＝4E＋2(D−4)V が成り立ち、3 次元の正三角形は負のエネルギーでも慣性モーメントを一定に保つことを示した——ここでは、同じ恒等式の平均から、八の字では位置エネルギーの平均がエネルギーの 2 倍になることを数える。論文490 は、制限三体問題の L4 が 27μ(1−μ)＜1 で安定になり、柵が質量比 24.9599357944 であることを示した——ここでは、三つの質量がどれも効くラウスの値が一つを 0 にするとその式に戻り、等しい質量では 9 になることを数える。加えたのは、八の字の周期・振り付け・一直線に並ぶ回数を数値で確かめたこと、ビリアルと恒等式の平均を一周期で確かめたこと、同じ乱れを正三角形と八の字に入れ、周期ごとの倍率と増分を数えたこと、ラウスの値を等しい質量と制限三体の極限で出したことである。

1. 記法と問い

設定：$G = 1$、三つの質量を 1 とし、平面で重力の運動方程式を積分する（DOP853・相対と絶対の許容 10^{-13}）。八の字の初期値は、体 1 の位置 $(-0.97000436, 0.24308753)$、体 2 はその原点対称、体 3 は原点、体 3 の速度 $(-0.93240737, -0.86473146)$、体 1・2 の速度はその $-1/2$ 倍である。正三角形は辺 1、角速度 $\sqrt{3}$ で回す。

問い：同じ大きさの乱れを入れたとき、二つの解の差は周期ごとにどう育つか。八の字はどんな振り付けで、どんな釣り合いにあるか。

2. 八の字の振り付け

計算 2.1：初期の状態に最も近く戻る時刻を 6.2〜6.45 で探し、振り付けと一直線に並ぶ瞬間を調べた。

量	値
エネルギー	-1.287141992
角運動量・全運動量の二乗	$0 \cdot 0$
周期	6.325914
一周期後の状態の差	1.592×10^{-9}
一周期後のエネルギーの相対変化	3.411×10^{-13}
振り付けの差（体 1 と 1/3 周期後の体 3・2/3 周期後の体 2）	1.370×10^{-8}
順番を逆にした対照の差	1.940009
一周期に一直線に並ぶ回数	6

> **観察 2.2**
>
> 八の字の解は、一周期に六回一直線に並ぶ振り付けである。三つの体は同じ曲線を 1/3 周期ずつずれて回り、一直線に並ぶたびに真ん中の体が $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ と入れ替わった——一回目は $t = 0$ から数えて 7 回と出た。初期の配置がちょうど一直線なので、0 の点を二度数えていた。数え始めを 1/40 周期ずらして 6 回になった。

3. ビリアルと恒等式

計算 3.1：一周期を 20000 点で平均した。

量	値
$\langle V\rangle/E$	2.000000
$\langle K\rangle/E$	-1.000000
$\langle 4E-2V\rangle$（$\ddot I$ の平均）	-3.350×10^{-10}
数値で二回微分した $\ddot I$ と $4E-2V$ の差の最大	2.227×10^{-7}
慣性モーメントの最小・最大	1.991310 · 2.000000
幅 / 平均	0.004354

> **観察 3.2**
>
> 八の字では、位置エネルギーの平均がエネルギーのちょうど 2 倍になる。3 次元の重力の恒等式 $\ddot I = 4E - 2V$ は数値の二回微分と 2.227×10^{-7} 以内で合い、周期解なので $\ddot I$ の平均は 0 になり、$\langle V\rangle = 2E$ だった——慣性モーメントは幅 / 平均 $\mathbf{0.004354}$ しか動かず、形を大きく変えながら大きさはほとんど変えない。

4. 乱れの育ち方

計算 4.1：大きさ 10^{-8} の同じ向きの乱れを初期の状態に足し、乱れの無い解との差を周期の終わりで測った。

周期	正三角形の差 / 乱れ	正三角形の辺の最大/最小 -1
1	2.9673×10^{1}	2.902290×10^{-7}
2	2.4732×10^{3}	2.467630×10^{-5}
3	2.1027×10^{5}	2.100791×10^{-3}
4	1.8078×10^{7}	2.016355×10^{-1}
5	4.1327×10^{8}	3.885492

周期	八の字の差 / 乱れ	時間をずらした差 / 乱れ	三辺の長さの差 / 乱れ
1	42.7	42.2	5.6
5	215.6	213.1	
10	431.6	426.8	52.4
20	862.8	853.2	
40	1721.1	1702.0	208.3

> **観察 4.2**
>
> これが本稿の芯である。回る正三角形の乱れは一周期ごとに掛け算で、八の字の乱れは周期に比例して足し算で育つ。正三角形の差は 1〜3 周期の幾何平均で一周期に **84.179** 倍（周期あたりの指数 1.222007）になり、4 周期で辺の比が崩れた。八の字の差は 1・10・40 周期で 42.7・431.6・1721.1 と周期に比例し、三辺の長さの差の 40 周期と 10 周期の比は **3.974215** だった——一回目は「時間をずらせば八の字の差は乱れの 100 倍以内に縮む」と見込んで落ちた。ずらしても 40 周期で 1702.0 のままで、向きによらない三辺の長さの差も周期に比例して育った。乱れを入れた初期の状態の角運動量は 1.227×10^{-8} である。なぜ比例して育つかは調べていない。

5. ラウスの値

計算 5.1：ラウスの値 $27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)/(m_1 + m_2 + m_3)^2$ を出した。等しい質量で 9.000000、一つを 0 にして残りを $1-\mu$ と μ にすると $27\mu(1-\mu)$ になり、論文490 の閾値の質量比 24.9599357944 で 1.000000000 だった。

> **観察 5.2**
>
> 等しい質量の正三角形のラウスの値は 9 で、490 の制限三体の柵と同じ式である。ラウスの条件（値が 1 より小さければ正三角形は線形に安定）は、一つの質量を 0 にすると 490 の $27\mu(1-\mu) < 1$ に戻る——等しい質量では値が 9 で 1 を大きく超え、計算 4.1 の正三角形は一周期に 84.179 倍の育ちで崩れた。

6. 分離子と、言わないこと

> **観察 6.1**
>
> 分離子は、乱れの育ちが周期ごとの倍率で決まるか、周期ごとの増分で決まるか。同じ 10^{-8} の乱れが、正三角形では周期ごとに **84.179** 倍されて **4** 周期で形を崩し、八の字では周期ごとにほぼ一定の量が足されて **40** 周期でも三辺の長さの差は **208.3** 倍だった——どちらも等しい質量の三体の周期的な解で、エネルギーも負だが、乱れの育ち方が違う。

> **観察 6.2**
>
> 言わないこと。八の字が安定だと証明したとは言わず、比例して育つ理由も言わない。ラウスの条件は書き写しである——乱れは一つの向きだけで、等しくない質量、三つより多い体、三次元の運動は扱っていない。

7. 点呼と結び

1. 八の字の周期 **6.325914**・振り付けの差 1.370×10^{-8}（計算 2.1）：順番を逆にすると **1.940009**。
2. 一周期に一直線 **6** 回（観察 2.2）：真ん中は三つの体が **2** 回ずつ。
3. $\langle V \rangle / E = -2.000000$（計算 3.1）：恒等式の平均が **0**。
4. 正三角形の育ち一周期に **84.179** 倍（観察 4.2）：本稿の芯。掛け算。
5. 八の字の三辺の長さの差の比 **3.974215**（**40** 周期 / **10** 周期）（観察 4.2）：足し算。
6. ラウスの値 **9.000000** と、**490** の極限で **1.000000000**（計算 5.1）：同じ式。
7. 倍率か増分か（観察 6.1）：分離子・論文**1002**・**490**。

結び：等しい質量の三体で、回る正三角形の乱れは一周期ごとに掛け算で、八の字の乱れは足し算で育つ。八の字の解は周期 **6.325914** の振り付けで、一周期に **6** 回一直線に並び、位置エネルギーの平均はエネルギーのちょうど **2** 倍だった——同じ 10^{-8} の乱れは、正三角形では一周期に **84.179** 倍になって **4** 周期で形を崩し、八の字では **40** 周期で三辺の長さの差を **208.3** 倍にしかせず、その育ちは周期に比例した。等しい質量の正三角形のラウスの値は **9** で、一つの質量を **0** にすると **490** の $27\mu(1-\mu)$ に戻る——八の字の育ちが比例する理由は調べておらず、安定を証明したとも言わない。分離子は、乱れの育ちが周期ごとの倍率で決まるか、周期ごとの増分で決まるかである。既刊との位置——論文**1002** は **D** 次元の恒等式と **3** 次元の正三角形が慣性モーメントを保つことを示し、論文**490** は制限三体の **L4** の柵を示した。ここでは、**1002** が扱わなかった正三角形の形の崩れ方を八

の字と並べて数え、490 の柵の式が三つの質量のラウスの値の極限であることを確かめた。正直に言えば——乱れは一つの向きだけで、等しくない質量、三つより多い体、三次元の運動は扱っていない。

参考文献

1. Chenciner, A., & Montgomery, R. (2000). A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics*.
2. Moore, C. (1993). Braids in classical dynamics. *Physical Review Letters*.
3. Routh, E. J. (1875). On Laplace’s three particles, with a supplement on the stability of steady motion. *Proceedings of the London Mathematical Society*.
4. 山岸勇輝 (2026). 『山の頂上に、物が留まっている』[論文490]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22760033
5. 山岸勇輝 (2026). 『三体の慣性モーメントは 4 次元でだけ放物線を描き、回る正三角形はそこでエネルギー 0 になる』[論文1002]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22823542

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)