トムソン問題の最適配置は分からないが、配位の欠陥の総和はいつも 12 である

— 球面の電荷の配置を三角形に分けると、欠陥の総和 12 と角欠損の総和 4π はエネルギーによらず決まり、4π を 5 配位の頂点だけが運ぶのは正二十面体のときだけである — 分離子は、総和か、個数と分け持ち方か — [論文1014]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

トムソン問題は、単位球面に N 個の同じ点電荷を置いて、クーロンエネルギーが最も小さくなる配置を問う。一般の N での答えは知られていない。本稿は、配置を凸包で三角形に分け、頂点ごとの隣の数（配位数 q）と角欠損を数える。新しい定理も法則も主張せず、見つけた配置が全体の最小であるとも言わない。 第一に、これが本稿の芯である。欠陥の総和 Σ(6−q) は、どの配置でも 12 だった——N＝12 から 282 までの六通りで最小化を始め直して得た局所最小 44 個はすべて 12 で、最小化しない乱数の点（N＝12・50・200・1000）でも 12 だった（第3節・第4節）。 第二に、5 配位の頂点の個数は一つに決まらない——12・13・14・15・17・18・20 と動き、動いた分だけ 7 配位が現れて総和を 12 に保つ。N＝200 の最も低い配置は 5 配位 14・7 配位 2 だった（第3節）。 第三に、角欠損の総和はいつも 4π だが、5 配位の頂点がそれを全部運ぶのは正二十面体だけである——正二十面体では各頂点がちょうど π/3 を運ぶ。最も低い配置で 5 配位の頂点が運ぶ割合は、N＝32 で 0.360945、72 で 0.156934、122 で 0.092409、200 で 0.065510、282 で 0.049323 と下がり、残りは 6 配位の頂点に散る（第5節）。 第四に、N＝12 の最小化は正二十面体に着く——正二十面体の頂点の座標から出したエネルギー 49.165253058 と、最小化の結果の差は 1.421×10^{-14} だった（第2節）。 第五に、エネルギーの値は配置ごとに動く——N＝122 では 10 回の出発から 9 個の違う局所最小が出て、最も低いものは 6698.560684053 だった。一様に広げた電荷の値 $N^2/2$ からの差を N の 3/2 乗で割ると、N＝12 の 0.549319 から N＝282 の 0.552016 まで少しずつ増える（第6節）。 第六に、分離子は、総和か、個数と分け持ち方か——総和（12 と 4π）はオイラーの式とデカルトの定理で決まり、エネルギーを見ない。個数と、4π を頂点がどう分け持つかは、配置ごとに動く（第7節）。 キーワード：トムソン問題、オイラーの式、デカルトの定理、角欠損、配位数、ガウス＝ボンネの定理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——トムソン問題（トムソン、1904）、多面体についてのオイラーの式、角欠損の総和が 4π になること（デカルトの定理）、それを曲率で読むガウス＝ボンネの定理は、いずれも既知である。最適配置を主張しない——最小化の出発点は N ごとに 4 回から 10 回で、見つけた最も低い配置が全体の最小であるとは言わない。大きい N の欠陥の並び方に立ち入らない——7 配位がどこに並ぶか、その文献には入らない。別のポテンシャルを扱わない——クーロン以外の力や、最小距離を最大にする問いは扱わない。既刊との関係：論文269 の射程注記は、分子の対称性（フラーレンなど）は格子の話ではないので扱わないと書いた——本稿はその席に座り、球面の上の配置の欠陥を数える（先客なし）。論文67 は、立体角の 4π が 2π に球面のオイラー標数 2 を掛けたものに等しく、計量によらないことを示した——ここでは、同じ 4π が配置の角欠損の総和として、エネルギーにも配置にもよらず現れる。論文128 は、ベクトル場の零点について、指数の総和と零点の個数を分けた——ここでは、欠陥の総和 12 は動かず、5 配位の個数は 12 から 20 まで動く。論文315 は、接吻数の問いで正二十面体の最小離角 63.434949 度を出した——ここでは、同じ正二十面体が電荷 12 個のエネルギーの最小として現れる。加えたのは、局所最小 44 個と乱数の点で欠陥の総和を数えたこと、5 配位の個数が動く範囲を並べたこと、角欠損の総和と、5 配位の頂点が運ぶ割合を N ごとに測ったこと、正二十面体のエネルギーを座標と最小化の二通りで出したことである。

1. 記法と問い

設定：単位球面に N 個の点を置き、エネルギー $E = \sum_{i<j} 1/|x_i - x_j|$ を最小にする。得た配置の凸包を三角形に分け、頂点 i の隣の数を配位数 q_i、頂点 i に集まる三角形の角の和を 2π から引いたものを角欠損 δ_i とする。

問い：最適な配置が分からなくても、決まっているものはあるか。

2. 正二十面体

計算 2.1：正二十面体の 12 頂点の座標からエネルギーを出すと 49.165253058 だった。N＝12 を 4 回最小化した最も低い値も 49.165253058 で、差は 1.421×10^{-14} だった。正二十面体の各頂点の角欠損は 1.047197551（$\pi/3$）で、総和は 12.566370614（4π）である。

3. 局所最小の配位数

計算 3.1：N ごとに最小化を始め直し、違う局所最小の配位数を数えた（最も低いものと、個数の幅）。

N	違う局所最小	最も低い E	その内訳
12	**1**	**49.165253058**	5 配位 12
32	**2**	**412.261274651**	5 配位 12・6 配位 20
72	**2**	**2255.001190975**	5 配位 12・6 配位 60
122	**9**	**6698.560684053**	5 配位 12・6 配位 110
200	**8**	**18438.990977347**	5 配位 14・6 配位 184・7 配位 2
282	**6**	**37147.880655526**	5 配位 15・6 配位 264・7 配位 3

数えた配置は 44 個で、すべて $\sum(6-q_i)=12$ だった。5 配位の個数として現れた値は 12・13・14・15・17・18・20 である（N＝282 の局所最小の一つは 5 配位 20・7 配位 8）。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。欠陥の総和は、どの局所最小でも 12 だった。5 配位が一つ増えるたびに 7 配位が一つ現れて、総和を保つ——最も低い配置が 5 配位 12 だけになるとは限らない（N＝200・282）。

4. 最小化しない点と、オイラーの式

計算 4.1：乱数で置いただけの点でも数えた。N＝1000 では配位数が 3 から 12 まで散らばったが、$\sum(6-q_i)=12$ だった（N＝12・50・200 でも 12）。凸包の辺の数は六通りの N すべてで $3N-6$、面の数は $2N-4$ だった（N＝282 で辺 840・面 560）。

> **観察 4.2**
>
> 欠陥の総和はエネルギーを見ていない。三角形だけの多面体ではオイラーの式から辺が $3N-6$ 本になり、配位数の和はその 2 倍の $6N-12$ である——だから $\sum(6-q_i)=12$ は、点をどう置いても成り立つ。最小化が決めるのは、12 がどの頂点にどう配られるかだけである。

5. 角欠損の分け持ち方

計算 5.1：最も低い配置で、角欠損の総和と、5 配位の頂点が運ぶ分を測った。

N	角欠損の総和	5 配位の分	4π に対する割合
12	12.566370614	12.566371	1.000000
32	12.566370614	4.535765	0.360945
72	12.566370614	1.972086	0.156934
122	12.566370614	1.161241	0.092409
200	12.566370614	0.823224	0.065510
282	12.566370614	0.619814	0.049323

N＝282 では 6 配位の頂点が 11.803778、7 配位の頂点が 0.142779 を運んでいた。

> **観察 5.2**
>
> 角欠損の総和はいつも 4π だが、5 配位の頂点がそれを全部運ぶのは正二十面体だけである。平らな格子なら 5 配位の点が一つにつき π/3 の欠けを持つが、球面の上の三角形は平らではないので、6 配位の頂点も少しずつ欠けを運ぶ——N が増えると、4π の大部分は 6 配位の頂点に散る。デカルトの定理（ガウス＝ボンネの定理の多面体版）が決めるのは総和だけである。

6. エネルギーの大きさ

計算 6.1：最も低い配置のエネルギーを、一様に広げた電荷の値 $N^2/2$ と比べた。$(N^2/2 - E)/N^{3/2}$ は N＝12・32・72・122・200・282 で 0.549319・0.550984・0.551607・0.551704・0.551900・0.552016 だった。

> **観察 6.2**
>
> エネルギーの値は配置ごとに動く。N＝122 では 10 回の出発から 9 個の違う局所最小が出て、最も低いものは **6698.560684053**、最も高いものは 6698.693576413 だった——見つけた値が全体の最小かは、この数え方では分からない。

7. 分離子と、言わないこと

> **観察 7.1**
>
> 分離子は、総和か、個数と分け持ち方か。総和の 12 と 4π は、オイラーの式とデカルトの定理で決まり、エネルギーを見ない——5 配位の個数と、4π を頂点がどう分け持つかは、配置ごとに動く。

> **観察 7.2**
>
> 言わないこと。見つけた局所最小が全体の最小であるとは言わない——大きい N での欠陥の並び方の文献にも、クーロン以外の力にも立ち入らない。

8. 点呼と結び

1. 欠陥の総和 **12**（計算 3.1・4.1）：局所最小 **44** 個と乱数の点のすべて。本稿の芯。
2. **5** 配位の個数は **12** から **20**（計算 3.1）：動く。
3. 角欠損の総和 4π、**5** 配位の割合 $\mathbf{0.360945 \cdot 0.156934 \cdot 0.092409 \cdot 0.065510 \cdot 0.049323}$（計算 5.1）：正二十面体だけが **1**。
4. 正二十面体のエネルギー $\mathbf{49.165253058}$（計算 2.1）：最小化と一致。
5. $(N^2/2 - E)/N^{3/2}$ は $\mathbf{0.549319}$ から $\mathbf{0.552016}$（計算 6.1）：エネルギーの大きさ。
6. 総和か、個数と分け持ち方か（観察 7.1）：分離子・論文**269**・**67**・**128**・**315**。

結び：トムソン問題の最適配置は分からないが、配位の欠陥の総和はいつも **12** である。N＝**12** から **282** までの局所最小 **44** 個でも、乱数で置いただけの点でも、欠陥の総和は **12**、角欠損の総和は 4π だった——**5** 配位の個数は **12** から **20** まで動き、4π を **5** 配位の頂点だけが運ぶのは正二十面体のときだけで、その割合は N＝**282** で **0.049323** まで下がる。N＝**12** の最小化は正二十面体のエネルギー **49.165253058** に着き、N＝**122** では **9** 個の違う局所最小が出た。分離子は、総和か、個数と分け持ち方かである。既刊との位置——論文**67** は立体角の 4π が 2π に球面のオイラー標数を掛けたものだと示し、論文**128** は指数の総和と零点の個数を分け、論文**315** は正二十面体を接吻数の問いで出した。ここでは、論文**269** がフラーレンを扱わないとした球面の上で、同じ総和が電荷の配置の欠陥として現れることを数えた。正直に言えば——最適配置そのものは一つも決めていない。

参考文献

1. Richeson, D. S. (2008). *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton University Press.

2. Thomson, J. J. (1904). On the Structure of the Atom. *Philosophical Magazine*.

3. 山岸勇輝 (2026).『4π パッチのオイラー標数的起源』[論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170

4. 山岸勇輝 (2026).『$4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである』[論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576

5. 山岸勇輝 (2026).『結晶が禁じているのは対称性ではなく、周期性である』[論文269]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169855

6. 山岸勇輝 (2026).『どの次元が特別かは、問いごとに違う』[論文315]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22208139

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)