格子点で数えた中身の誤差は、低い次元では皮の揺らぎ、高い次元では一つの殻の段差で決まる

— ガウスの円問題を次元で並べると、未解決の 2 次元と 3 次元は、皮の揺らぎの積み重ねが一つの殻の段差に負けない次元である — 分離子は、段差の積み重ねか、一回の段差か — [論文1015]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

半径 r の球の中の格子点を数えると、体積 V r の d 乗（中身）からずれる。2 次元でこのずれの大きさを問うのがガウスの円問題で、2 次元と 3 次元ではまだ解けていない。本稿は、ずれを次元 d＝2 から 6 まで同じ数え方で測り、一つの殻（点の並ぶ一枚の球面）の段差と比べる。新しい定理も法則も主張せず、冪を証明もしない。 第一に、これが本稿の芯である。ずれの冪は、2 次元では皮の揺らぎの平方根、4 次元以上では一つの殻の段差に合う——半径 1000 までで当てはめた冪は、d＝2 で **0.501657**、3 で **1.088426**、4 で **2.002565**、5 で **3.000074**、6 で **3.999919** だった。皮の揺らぎの平方根の見立ては (d−1)/2、殻の段差の見立ては d−2 で、大きいほうが当たる（第2節）。 第二に、4 次元以上では、ずれは一回の段差で決まる——ずれを一つの殻の段差で割った比の冪は、d＝4 で **0.002552**、5 で **−0.000013**、6 で **−0.000128** とほぼ 0 で、比そのものは **0.803320・0.730394・0.712541** に止まる（第3節）。 第三に、2 次元では段差の積み重ねが勝ち、3 次元はその境目に居る——比の冪は d＝2 で **0.416402**、3 で **0.086420** だった。文献で冪が決まっているのは 4 次元以上で、未解決の 2 次元と 3 次元は、比の冪が 0 にならない次元と重なる（第3節）。 第四に、多角形なら皮の項はちょうど決まり、円では平均で消える——直角二等辺三角形と正方形を 1 倍から 1000 倍に広げると、格子点の数と面積の差はどれも境界の点の数の半分に 1 を足した値にちょうど等しかった。円では、ずれの平均は二乗平均の **−0.000362** 倍で、皮の長さ **5441.398093** に対して二乗平均は **46.807678** だった（第4節）。 第五に、数え方は三通りで確かめた——表し方の数を畳み込みで作り、2 次元は床関数での直接の数え（n＝999999 で 3141521 点）、4 次元はヤコビの式、3 次元は小さな n の総当たりと一致した（第1節）。 第六に、分離子は、段差の積み重ねか、一回の段差か——一つの殻に乗る点の数の揺れが次元とともに大きくなり、4 次元で皮の揺らぎの積み重ねを追い越す（第5節）。 キーワード：ガウスの円問題、格子点、次元、ピックの式、ヤコビの式、表し方の数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ガウスの円問題、2 次元でずれが r の 1/2 乗より小さくならないこと（ハーディとランダウ、1915）、5 次元以上でずれが r の d−2 乗の大きさに決まり 4 次元でもほぼ決まっていること（ヴァルフィシュ 1957 の本にまとめられている）、3 次元の最良の評価が r の 21/16 乗（ヒース＝ブラウン、1999）で予想が r の 1 乗であること、ピックの式、四つの平方数の和についてのヤコビの式は、いずれも既知である。冪を証明しない——半径 1000 までの数え上げに冪を当てはめただけで、証明にはならない。3 次元のずれの理由を言わない——3 次元の冪が 1 から上にずれ、窓を広げると下がっていくことは測ったが、対数の因子かどうかは測っていない。一般の図形に立ち入らない——球と、直角二等辺三角形・正方形だけを数え、一般の凸な図形の文献には入らない。既刊との関係：論文331 の射程注記は、エルハート多項式を扱わない、多角形を k 倍に膨らませたときの格子点数の一般論には入らないと書いた——本稿はその隣に置き、膨らませるのが多角形でなく球だと、数が式で決まらずずれが残ることを数える（同じ射程注記の別の項、穴のある領域の隣には論文876 が居る）。論文1007 は、臨界質量が皮と中身の釣り合いで決まることを示した——ここでは、中身を点で数えるときのずれが、低い次元では皮から、高い次元では一枚の殻から来ることを数える。論文912 は、質量を単位球の面積に取ると温度の係数がどの次元でも単位球の体積 V になることを示した——ここでは、同じ V が格子点の数の主な項として現れ、そのずれの冪が次元で入れ替わる。加えたのは、2 次元から 6 次元までのずれの冪を同じ数え方で測ったこと、ずれを一つの殻の段差で割った比の冪が 4 次元以上でほぼ 0 になることを示したこと、未解決の次元が比の冪の 0 にならない次元と重なることを並べたこと、多角形で皮の項がちょうど決まり、円で平均が消えることを数えたことである。

1. 記法と問い

設定：d 次元で、$x_1^2+\cdots+x_d^2\le n$ を満たす整数の点の数を $N_d(n)$、半径 $r=\sqrt{n+1/2}$（殻と殻の中間）の球の体積を $V_d r^d$ とし、ずれを $P_d=N_d(n)-V_d r^d$ とする。n をちょうど d 個の平方数の和で表す仕方の数を $r_d(n)$ とすると、N_d は r_d の和である。

問い：ずれの大きさは、次元でどう変わるか。2 次元と 3 次元だけが解けていないのはなぜか。

計算 1.1：$r_d(n)$ を $n\le 10^6$ まで、一次元の平方数の並びを畳み込んで作った。2 次元は床関数での直接の数えと三点（$n=1000$・54321・999999）で一致し、$n=999999$ では 3141521 点だった。4 次元の $r_4(1000)=3744$ は、4 で割れない約数の和の 8 倍というヤコビの式と一致し、九つの n で一致した。3 次元は $n\le 200$ の総当たりと一致した。

2. ずれの冪

計算 2.1：n を $[K/2,K]$ の窓で区切り、$K=10^4$ から 10^6 までの五つの窓でずれの二乗平均を出して、r の冪を当てはめた。

d	当てはめた冪	皮の揺らぎの平方根 $(d-1)/2$	殻の段差 $d-2$
2	0.501657	0.5	0
3	1.088426	1	1
4	2.002565	1.5	2
5	3.000074	2	3
6	3.999919	2.5	4

3 次元の隣り合う窓の冪は 1.101855・1.093131・1.082241・1.077218 と下がっていった。

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。ずれの冪は、二つの見立ての大きいほうに合う。皮の揺らぎの見立ては、境界の上で点が内か外かに半々で割れる揺らぎが皮の広さの平方根だけ残るというもので、冪は $(d-1)/2$ である。殻の段差の見立ては、一枚の殻に乗る点の数の揺れで、冪は $d-2$ である——2 次元では前者、4 次元以上では後者が大きく、3 次元では二つがどちらも 1 で等しい。

3. 一つの殻の段差との比

計算 3.1：一つの殻の段差を $D_d(n) = r_d(n) - (d/2)V_d n^{d/2-1}$（点の数から体積の増え方を引いたもの）とし、同じ窓で二乗平均の冪と、ずれとの比の冪を出した。

d	段差の冪	ずれ÷段差の冪	いちばん大きい窓での比
2	0.085255	0.416402	6.242945
3	1.002006	0.086420	1.391847
4	2.000013	0.002552	0.803320
5	3.000087	−0.000013	0.730394
6	4.000048	−0.000128	0.712541

観察 3.2

4 次元以上では、ずれは一回の段差で決まる。比の冪がほぼ 0 で、比そのものが 1 より小さい値（0.712541 から 0.803320）に止まる——ずれは、いちばん外の一枚の殻に乗る点の数の揺れと同じ大きさである。

観察 3.3

2 次元では段差の積み重ねが勝ち、3 次元はその境目に居る。2 次元では一枚の殻の揺れはほとんど育たない（冪 0.085255）のに、ずれは r の 0.416402 乗の割合で段差を追い越していく。3 次元では比の冪が 0.086420 と小さいが 0 ではない——文献で冪が決まっているのは 4 次元以上で、未解決の 2 次元と 3 次元は、比の冪が 0 にならない次元と重なる。

4. 多角形との対比

計算 4.1：直角二等辺三角形（頂点 $(0,0)$・$(k,0)$・$(0,k)$）と正方形（$[-k,k]^2$）を $k=1$ から 1000 まで数えた。どちらも、格子点の数と面積の差は、境界の点の数の半分に 1 を足した値にちょうど等しかった（三角形の $k=1000$ で格子点 501501、面積 500000.0、差 1501.0、境界の点 3000）。

計算 4.2：円（2 次元）で、ずれの平均と二乗平均を比べた。$n \in [5000, 10000]$ では平均 -0.073787・二乗平均 14.771449・比 -0.004995（皮の長さ $2\pi r = 544.139809$）、$n \in [500000, 1000000]$ では平均 -0.016955・二乗平均 46.807678・比 -0.000362（皮の長さ 5441.398093）だった。

観察 4.3

多角形なら皮の項はちょうど決まり、円では平均で消える。多角形の辺の上には格子点が規則正しく並ぶので、皮の項は境界の点の数の半分としてそのまま残る（ピックの式）——円の境界には格子点がほとんど乗らず、内と外に割れる分が平均で打ち消し合って、揺らぎだけが残る。

5. 分離子と、言わないこと

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、段差の積み重ねか、一回の段差か。一枚の殻に乗る点の数の揺れは次元とともに $d-2$ の冪で大きくなり、4 次元で皮の揺らぎの積み重ね（冪 $(d-1)/2$）を追い越す——その先ではずれが一回の段差で決まり、手前では積み重ねで決まる。

> **観察 5.2**
>
> 言わないこと。冪は半径 1000 までの当てはめで、証明ではない。3 次元の冪が 1 から上にずれる理由も言わない——一般の凸な図形や、点の分布の細かい文献にも入らない。

6. 点呼と結び

1. 冪 **0.501657**・**1.088426**・**2.002565**・**3.000074**・**3.999919**（計算 2.1）：二つの見立ての大きいほう。本稿の芯。
2. ずれ÷段差の冪 **0.416402**・**0.086420**・**0.002552**・**−0.000013**・**−0.000128**（計算 3.1）：4 次元以上でほぼ 0。
3. 比 **0.803320**・**0.730394**・**0.712541**（計算 3.1）：一回の段差で決まる。
4. 多角形の差＝境界の点の半分＋1（計算 4.1）：ちょうど。
5. 円の平均は二乗平均の **−0.000362** 倍、二乗平均 **46.807678**、皮の長さ **5441.398093**（計算 4.2）：皮の項が消える。
6. 積み重ねか、一回の段差か（観察 5.1）：分離子・論文331・876・1007・912。

結び：格子点で数えた中身の誤差は、低い次元では皮の揺らぎ、高い次元では一つの殻の段差で決まる。2 次元から 6 次元まで同じ数え方で測ると、ずれの冪は 0.501657・1.088426・2.002565・3.000074・3.999919 で、皮の揺らぎの平方根と殻の段差の見立ての大きいほうに合った——ずれを一つの殻の段差で割った比の冪は、4 次元以上でほぼ 0、2 次元で 0.416402、3 次元で 0.086420 で、未解決の 2 次元と 3 次元はこの冪が 0 にならない次元と重なる。多角形なら差は境界の点の半分に 1 を足した値にちょうど等しく、円ではずれの平均が二乗平均の −0.000362 倍まで消える。分離子は、段差の積み重ねか、一回の段差かである。既刊との位置——論文1007 は臨界質量を皮と中身の釣り合いで数え、論文912 は単位球の体積 V をどの次元でも係数として出した。ここでは、論文331 が入らなかった「膨らませたときの格子点数」を、多角形でなく球で数え、ずれの出どころが次元で入れ替わることを示した。正直に言えば——冪は一つも証明していない。

参考文献

1. Hardy, G. H. (1915). On the expression of a number as the sum of two squares. *Quarterly Journal of Mathematics*.
2. Heath-Brown, D. R. (1999). Lattice points in the sphere. In *Number Theory in Progress*. de Gruyter.
3. Walfisz, A. (1957). *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
4. 山岸勇輝 (2026).『面積という連続量が、二種類の点を数えるだけで厳密に出る』[論文331]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22681503
5. 山岸勇輝 (2026).『右手を壁に付けて進めば必ず着くのは、壁が外周と一続きのときだけである』[論文876]. Zenodo.
6. 山岸勇輝 (2026).『m を単位球の面積に取ると、温度の係数はどの次元でも単位球の体積になる』[論文912]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22804990
7. 山岸勇輝 (2026).『臨界質量は皮と中身の釣り合いで決まり、立方体の割り増しは表面積の係数と一致しない』[論文1007]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22823803

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)