べきの和の方程式の解の数は、指数の作る三角形が球面か平面か双曲面かで分かれる

— 角 π/a・π/b・π/c の三角形の内角の和が π より大きい球面では原始解が族をなし、π より小さい双曲では有限個で、フェルマーの n＝2・3・4 は三つに一つずつ入る — 分離子は、指数の逆数の和が 1 を超えるか — [論文1016]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

x の a 乗と y の b 乗の和が z の c 乗になる整数の解（一般化フェルマー方程式）は、指数の組で様子が大きく変わる。ビール予想とフェルマー＝カタラン予想は、その一部について未解決の問いである。本稿は、指数から角 π/a・π/b・π/c の三角形を作り、それが球面・平面・双曲面のどれに描けるかで解の数を並べる。新しい定理も法則も主張せず、予想を証明もしない。 第一に、これが本稿の芯である。フェルマーの n＝2・3・4 は、球面・平面・双曲面に一つずつ入る——指数の逆数の和 3/n は n＝2 で 1.5（球面）、3 でちょうど 1（平面）、4 で 0.75（双曲）である。n＝2 の原始ピタゴラス数は斜辺 10000 まで 1593 組あり、斜辺を 2π で割った 1591.549431 と同じ大きさだった。n＝3 と 4 は、調べた箱の中に解が無かった（第2節）。 第二に、球面では三角形の枚数が 4π から決まり、原始解は族をなす——面積 π(和−1) の三角形で球面を覆う枚数は (2,2,3) で 12、(2,3,3) で 24、(2,3,4) で 48、(2,3,5) で 120 である。$x^2+y^2=z^3$ の原始解は z≤50・100・200 で 14・32・64 組と増え、すべてがガウス整数の三乗から出る一つの族に入った（第1節・第3節）。 第三に、双曲では、原始解は有限個で、既知の五つがちょうど出る——$x^2+y^3=z^7$（和 0.976190）の原始解を z≤120 の箱で探すと、$3^2-2^3=1^7$、$71^2-17^3=2^7$、$21063928^2-76271^3=17^7$、$2213459^2+1414^3=65^7$、$15312283^2+9262^3=113^7$ の五つで、ポーネンらが示した一覧とちょうど一致した。平面の $x^2+y^3=z^6$ では $3^2-2^3=1$ だけだった（第4節）。 第四に、小さな箱の個数だけでは三つは分かれない——球面の側の $x^2+y^3=z^5$（和 1.033333）でも、z≤60 の箱の原始解は 5 個（z＝57 の $12092581^2-52684^3$ を含む）しかなかった。三つを分けているのは個数ではなく、解を式で書ける族があるかどうかである（第4節）。 第五に、共通因数を許すと、双曲でも解はいくらでもある——$x^3+y^3=z^4$ には z≤200 で 17 組の解（$2^3+2^3=2^4$、$9^3+18^3=9^4$ など）があったが、原始解は 0 組だった。ビール予想が問うのは、解に必ず共通因数があるかどうかである（第5節）。 第六に、分離子は、指数の逆数の和が 1 を超えるか——超えれば三角形は球面に描け、その面積が 4π を有限の枚数で覆う。ちょうど 1 なら平面、足りなければ双曲面である（第6節）。

キーワード：一般化フェルマー方程式、ビール予想、フェルマー＝カタラン予想、球面過剰、ジラールの定理、ピタゴラス数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——フェルマーの最終定理（ワイルズ、1995）、n＝3 の場合（オイラー）、指数を固定した双曲の場合に原始解が有限個であること（ダルモンとグランヴィル、1995）、球面の場合に原始解が有限個の式の族で与えられること（ボイカース、1998）、$x^2+y^3=z^7$ の原始解の一覧（ポーネン、シェーファー、ストール、2007）、球面三角形の面積が内角の和から π を引いたものであること（ジラールの定理）は、いずれも既知である。予想を証明しない——ビール予想もフェルマー＝カタラン予想も、証明も反例探しもしない。箱の中を数えただけである。式の族を作らない——$x^2+y^3=z^5$ の族は作らず、族があることは引くだけである。箱の個数から三分類を読まない——小さな箱では、球面の $x^2+y^3=z^5$ の原始解も 5 個しかない。既刊との関係：論文641 は、ABC 予想が多項式では定理で整数では予想であることを数え、分けるのは微分だと置いた——ここでは、同じ整数の方程式を指数の組で並べ、分けるのが指数の逆数の和であることを数える。論文642 は、フェルマーの最終定理への道が道具ごとに届く指数の範囲で違うことを示した——ここでは、n＝2・3・4 が三角形の三つの形に一つずつ入ることを並べる。論文409 は、ジラールの定理で球面三角形の面積が内角の和の余りに等しいことを使い、歪まない地図が無いことを示した——ここでは、同じ面積が 4π を覆う枚数を決める。論文512 は、球面過剰を三等分して引くと曲面の問題が平面の問題に化けることを示した——ここでは、球面過剰の符号そのものが方程式の三分類になる。加えたのは、指数の三角形の三分類を解の数の表と並べたこと、フェルマーの n＝2・3・4 が三つに一つずつ入ることを示したこと、球面の族と双曲の有限個を箱の中で数えたこと、共通因数を許すと双曲でも解が出ることを数えたことである。

1. 記法と問い

設定：正の整数の指数 a,b,c について $x^a+y^b=z^c$ の整数解を考える。x,y,z が共通の素因数を持たないものを原始解と呼ぶ。角 $\pi/a\cdot\pi/b\cdot\pi/c$ の三角形は、内角の和が π より大きければ球面に、ちょうど π なら平面に、小さければ双曲面に描ける。内角の和と π の比較は、$1/a+1/b+1/c$ と 1 の比較と同じである。

問い：解がいくらでもある指数と、有限個しかない指数を分けているのは何か。

計算 1.1：指数の組ごとに和を出した。

(a,b,c)	和	形	4π を覆う枚数
$(2,2,3)$	1.333333	球面	12
$(2,3,3)$	1.166667	球面	24
$(2,3,4)$	1.083333	球面	48
$(2,3,5)$	1.033333	球面	120
$(2,3,6)$・$(2,4,4)$・$(3,3,3)$	1.000000	平面	なし
$(2,3,7)$	0.976190	双曲	なし
$(3,3,4)$	0.916667	双曲	なし
$(4,4,4)$	0.750000	双曲	なし

球面の枚数は 4π を三角形の面積 $\pi(1/a+1/b+1/c-1)$ で割ったもので、$(2,2,n)$ は $4n$ 枚（$(2,2,5)$ で 20）になる。

2. フェルマーの n＝2・3・4

計算 2.1：原始ピタゴラス数（$n=2$）を斜辺 10000 まで、式による作り方と総当たりの二通りで数え、どちらも 1593 組だった。斜辺を 2π で割ると 1591.549431 である。$x^3+y^3=z^3$（$x,y\le 2000$）と $x^4+y^4=z^4$（$x,y\le 1000$）には解が 0 組だった。

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。フェルマーの n＝2・3・4 は、球面・平面・双曲面に一つずつ入る。指数の逆数の和 $3/n$ は $n=2$ で 1.5、$n=3$ でちょうど 1、$n=4$ で 0.75 である——最終定理が「解が無い」と言う $n\ge 3$ は、平面と双曲の側に入る。

3. 球面の族

計算 3.1：$x^2+y^2=z^3$ の原始解（$x,y>0$）を数え、ガウス整数 $u+iv$ の三乗の実部と虚部（$z=u^2+v^2$）から作る族と突き合わせた。

z の上限	原始解	族	族に入る解
50	14	14	14
100	32	32	32
200	64	64	64

> **観察 3.2**
>
> 球面の側では、原始解が一つの式の族をなし、箱を広げると増えていく。この箱の中の原始解は、すべてガウス整数の三乗という一つの式から出た——ピタゴラス数も同じで、式による作り方が総当たりと一致した。

4. $x^2+y^3=z$ の c 乗

計算 4.1：$x^2+y^3=z^c$ の原始解を、$c=5$ は $z\le 60$・$|y|\le 100000$、$c=6$ は $z\le 40$・$|y|\le 100000$、$c=7$ は $z\le 120$・$|y|\le 80000$ で探した。

c	和	形	原始解
5	1.033333	球面	5 個
6	1.000000	平面	$3^2-2^3=1$ だけ
7	0.976190	双曲	5 個

$c=5$ の五つは $3^2-2^3=1^5$、$7792^2-393^3=7^5$、$411^2-41^3=10^5$、$654^2+127^3=19^5$、$12092581^2-52684^3=57^5$ で、$c=7$ の五つは $3^2-2^3=1^7$、$71^2-17^3=2^7$、$21063928^2-76271^3=17^7$、$2213459^2+1414^3=65^7$、$15312283^2+9262^3=113^7$ だった。

> **観察 4.2**
>
> 双曲の $c=7$ では、既知の五つがちょうど出た。ポーネンらが示した原始解の一覧と一致した——箱の外にはもう無いことが、この場合は証明されている。

> **観察 4.3**
>
> 小さな箱の個数だけでは三つは分かれない。球面の $c=5$ でも原始解は 5 個しかなく、双曲の $c=7$ と同じ数だった——三つを分けるのは個数ではなく、解を式で書ける族があるかどうかである（球面の場合はボイカースが族を示した）。

5. 共通因数を許すと

計算 5.1：$x^3+y^3=z^4$（和 0.916667・双曲）の解を $z\le 200$ で数えると 17 組で、最初の五つは $2^3+2^3=2^4$、$9^3+18^3=9^4$、$32^3+32^3=16^4$、$28^3+84^3=28^4$、$70^3+105^3=35^4$ だった。原始解は 0 組だった。

> **観察 5.2**
>
> 共通因数を許すと、双曲でも解はいくらでもある。有限なのは原始解の話で、共通因数のある解は双曲でもいくらでも作れる——ビール予想（指数がどれも 3 以上）が問うのは、解に必ず共通因数があるかどうかで、指数がどれも 3 以上なら和は 1 以下、つまり平面か双曲の側だけを問うている。

6. 分離子と、言わないこと

> **観察 6.1**
>
> 分離子は、指数の逆数の和が 1 を超えるか。超えれば三角形は球面に描け、面積が π に（和 -1）を掛けた値の三角形が 4π を有限の枚数で覆う——ちょうど 1 なら平面、足りなければ双曲面で、三角形の面積はそのまま足りない分になる。

> **観察 6.2**
>
> 言わないこと。ビール予想もフェルマー＝カタラン予想も証明せず、$x^2+y^3=z^5$ の族も作らない——箱の中の個数から三分類を読むこともしない。

7. 点呼と結び

1. フェルマーの n＝2・3・4 が球面・平面・双曲（観察 2.2）：本稿の芯。

2. ピタゴラス数 **1593** 組、斜辺÷2π＝**1591.549431**（計算 2.1）：球面の族。

3. **4π** を覆う枚数 **12・24・48・120**（計算 1.1）：球面の三角形。

4. $x^2 + y^2 = z^3$ の原始解 **14・32・64** 組がすべて族に入る（計算 3.1）：増える。

5. $c = 7$（和 **0.976190**）で既知の五つ（計算 4.1）：双曲の有限個。

6. $c = 5$（和 **1.033333**）でも **5** 個（観察 4.3）：箱の個数では分かれない。

7. $x^3 + y^3 = z^4$ の **17** 組、原始解 **0**（計算 5.1）：共通因数。

8. 逆数の和が **1** を超えるか（観察 6.1）：分離子・論文**641・642・409・512**。

結び：べきの和の方程式の解の数は、指数の作る三角形が球面か平面か双曲面かで分かれる。フェルマーの **n＝2・3・4** は、指数の逆数の和が **1.5・1・0.75** で三つに一つずつ入り、**n＝2** のピタゴラス数は斜辺 **10000** まで **1593** 組、斜辺÷2π の **1591.549431** と同じ大きさだった――球面の $x^2+y^2=z^3$ の原始解は **14・32・64** 組と増えてすべて一つの族に入り、双曲の $x^2+y^3=z^7$ では既知の五つがちょうど出た。ただし球面の $x^2+y^3=z^5$ も小さな箱では **5** 個しかなく、分けているのは個数ではなく族があるかどうかである。共通因数を許せば双曲の $x^3+y^3=z^4$ にも **17** 組あるが、原始解は **0** 組だった。分離子は、指数の逆数の和が **1** を超えるかである。既刊との位置――論文**641** は **ABC** 予想を多項式と整数で分け、論文**642** はフェルマーの最終定理への道を道具ごとの指数で分け、論文**409** と論文**512** は球面三角形の面積を内角の和の余りとして使った。ここでは、その余りの符号が方程式の三分類になることを並べた。正直に言えば――ビール予想もフェルマー＝カタラン予想も、一歩も証明していない。

参考文献

1. Beukers, F. (1998). The Diophantine equation $Ax^p + By^q = Cz^r$. *Duke Mathematical Journal*.

2. Darmon, H., & Granville, A. (1995). On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$. *Bulletin of the London Mathematical Society*.

3. Poonen, B., Schaefer, E. F., & Stoll, M. (2007). Twists of $X(7)$ and primitive solutions to $x^2 + y^3 = z^7$. *Duke Mathematical Journal*.

4. Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*.

5. 山岸勇輝 (2026).『歪まない地図は存在しない――投影法が下手だからではない』[論文409]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699616

6. 山岸勇輝 (2026).『余りを三等分して引くと、曲面の問題が平面の問題に化ける』[論文512]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22862145

7. 山岸勇輝 (2026).『ABC 予想は多項式では定理で、整数では予想である――証明に要る微分が整数には無い』[論文641]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805478

8. 山岸勇輝 (2026).『フェルマーの最終定理への道は道具で範囲が違い、降下とクンマーは 92 個の指数に届かない』[論文642]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805604

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)