「〜以外にもう無いか」の見立ての答えは ln ln x で、探す上限を e 乗しないと期待は一つも増えない

— p^2 で割った余りの条件を確率 1/p と見ると、見つかった数は Σ1/p と合い、外の大きな探索で何も出ないのも期待どおりである — 分離子は、確率が 1/p か $1/p^2$ か、和が発散するか収束するか — [論文 1017]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ウィーフェリッヒ素数（2 の p−1 乗を p^2 で割ると 1 余る）は 1093 と 3511、ウィルソン素数（p−1 の階乗を p^2 で割ると −1 余る）は 5・13・563、ウォルステンホルム素数は 16843 と 2124679 しか知られていない。「これ以外に存在するか」はどれも未解決である。本稿は、条件が確率 1/p で満たされるという見立てで、見つかった数と、見つからないことを読む。新しい定理も法則も主張せず、無限にあることも証明しない。 第一に、これが本稿の芯である。見つかった数は、1/p の和と同じ大きさだった——自分で探し直すと、ウィーフェリッヒの底 2・3・5・7 とウィルソンとウォルステンホルムの六つで合わせて 12 個が見つかり、見立ての期待（1/p の和）は合計 14.787410 だった。ポアソン分布で 12 個以下になる確率は 0.285599 である（第2節・第3節）。 第二に、見立ての前提、商の余りが一様であることは数えられる——フェルマー商を p で割った余りを $5 \le p \le 10^6$ の 78496 個で十に分けると、カイ二乗は 7.600438（自由度 9）、ウィルソン商の 2260 個では 12.176991 だった（第4節）。 第三に、外の大きな探索で何も出ないのは、見立ての期待どおりである——ウィルソン素数は 2×10^{13} まで、ウィーフェリッヒ素数は 6.7×10^{15} まで探されて新しいものは無い。自分の上限からそこまでの期待は 1.128987 と 0.815749 で、何も出ない確率は 0.323361 と 0.442308 である（第5節）。 第四に、次の一個を期待するには、上限を e 乗しなければならない——ln ln x は x を e 乗して初めて 1 増える。ウィルソンなら 2×10^{13} の e 乗、10 の 36.155948 乗、ウィーフェリッヒなら 10 の 43.019732 乗まで探して、期待がやっと 1 増える（第5節）。 第五に、確率が $1/p^2$ なら、和は収束して有限個しか期待されない——2 の p−1 乗を p^3 で割ると 1 余る素数は 10^7 までに一つも無く、$1/p^2$ の和は全部で 0.452247、3511 より上では 0.000031369 しか残らない（第6節）。 第六に、分離子は、確率が 1/p か $1/p^2$ か——1/p なら和は ln ln x で発散してどこまでも期待が残り、$1/p^2$ なら和は収束する。前者の「無い」は探し方の上限の問題で、後者の「無い」は見立ての上でも終わっている（第7節）。 キーワード：ウィーフェリッヒ素数、ウィルソン素数、ウォルステンホルム素数、フェルマー商、メルテンスの定理、ポアソン分布。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——フェルマーの小定理、ウィルソンの定理、ウォルステンホルムの定理、1/p の和が ln ln x で増えること（メルテンスの定理）、これらの素数が確率 1/p で現れるという見立て（クランドール、ディルヒャー、ポメランス、1997）、ウィルソン素数が 2×10^{13} まで探されたこと（コスタ、ゲルビッチ、ハーヴェイ、2014）、ウィーフェリッヒ素数が 6.7×10^{15} まで探されたこと（ドレとクライヴ、2011）、ウォルステンホルム素数の問い（マッキントッシュ、1995）は、いずれも既知である。無限にあることを証明しない——1/p の見立ては見立てであり、正しいことも示さない。底ごとの独立を主張しない——六つの期待を足してポアソンで比べたのは、大きさを見る目安である。外の探索の中身に立ち入らない——上限は論文から引くだけで、探し方は扱わない。既刊との関係：論文603 は、合成数 561 が互いに素なすべての底でフェルマーの判定を通ることを示した——ここでは、同じ 2 の p−1 乗を p で割った余りでなく、p^2 で割った余りが 1 になる素数を数える。論文769 は、素数の平均の間隔が ln x に乗り、最大の間隔は平均から離れていくことを示した——ここでは、素数の逆数の和が ln ln x というさらに遅い増え方をし、それが「〜以外に存在するか」の答えの遅さになることを数える。加えたのは、六つの条件で自分で探し直して見つかった数と期待を並べたこと、商の余りが一様かを十分位で数えたこと、外の探索で何も出ない確率と、期待を 1 増やすのに要る上限を出したこと、確率 $1/p^2$ の条件と対照したことである。

1. 記法と問い

設定：素数 p について、ウィーフェリッヒの条件（底 a）は $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$、ウィルソンの条件は $(p-1)!\equiv -1 \pmod{p^2}$、ウォルステンホルムの条件は $\binom{2p-1}{p-1}\equiv 1 \pmod{p^4}$ である。どれも p で割った余りでは必ず成り立ち（フェルマーの小定理・ウィルソンの定理・ウォルステンホルムの定理）、一段上の余りで成り立つかどうかが問われる。

見立て：一段上の余り（商）が 0 から $p-1$ に一様に散らばるなら、条件は確率 $1/p$ で満たされる。範囲の中の期待個数は $\sum 1/p$ で、これは $\ln\ln x$ で増える（メルテンスの定理）。

問い：「これ以外に存在するか」に、見立ては何と答えるか。

2. 探し直す

計算 2.1：条件を自分で確かめて探した。

条件	範囲	見つかった素数
ウィーフェリッヒ（底 2）	$p \leq 10^7$	1093・3511
ウィーフェリッヒ（底 3）	$p \leq 10^6$	11
ウィーフェリッヒ（底 5）	$p \leq 10^6$	2・20771・40487
ウィーフェリッヒ（底 7）	$p \leq 10^6$	5・491531
ウィルソン	$p \leq 20000$	5・13・563
ウォルステンホルム	$5 \leq p \leq 17000$	16843

3. 期待と見つかった数

計算 3.1：それぞれの範囲で、底で割れない素数の $1/p$ を足した。

条件	期待 $\sum 1/p$	見つかった数
ウィーフェリッヒ（底 2）	2.541449	2
ウィーフェリッヒ（底 3）	2.553995	1
ウィーフェリッヒ（底 5）	2.687328	3
ウィーフェリッヒ（底 7）	2.744471	2
ウィルソン	2.554934	3
ウォルステンホルム	1.705233	1
合計	14.787410	12

期待の合計 14.787410 のポアソン分布で、12 個以下になる確率は 0.285599 だった。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。見つかった数は、1/p の和と同じ大きさだった。どれも数個しか見つからないのは、条件が特別に厳しいからではなく、$1/p$ の和がそれだけしか無いからである——10^7 までの全素数の $1/p$ の和でさえ 3.041449 で、$\ln\ln 10^7 = 2.779943$ とほぼ同じ大きさである。

4. 見立ての前提

計算 4.1：商（一段上の余り）を p で割った値を十に区切って数えた。フェルマー商（底 2・$5 \le p \le 10^6$ の 78496 個）の十分位は 8014・7825・7774・7892・7893・7866・7862・7874・7770・7726 で、カイ二乗は 7.600438（自由度 9）だった。ウィルソン商（$5 \le p \le 20000$ の 2260 個）は 238・219・202・235・219・214・205・248・226・254 で、カイ二乗は 12.176991 だった。

> **観察 4.2**
>
> 見立ての前提、商の余りが一様であることは、この範囲では崩れていない。どちらのカイ二乗も、一様からずれていると言える大きさではなかった——これは前提を数で確かめたのであって、証明したのではない。

5. 外の探索と、e 乗

計算 5.1：外で探された上限から、見立ての期待を出した。ウィルソン素数は 2×10^{13} まで探されて新しいものは無く、自分の上限 2×10^4 からそこまでの期待は 1.128987、何も出ない確率は 0.323361 だった。ウィーフェリッヒ素数（底 2）は 6.7×10^{15} まで探されて新しいものは無く、自分の上限 10^7 からの期待は 0.815749、何も出ない確率は 0.442308 だった。

計算 5.2：$\ln\ln x$ は x を e 乗すると 1 だけ増える。ウィルソンの上限 2×10^{13} の e 乗は 10 の 36.155948 乗、ウィーフェリッヒの上限 6.7×10^{15} の e 乗は 10 の 43.019732 乗である。

> **観察 5.3**
>
> 外の大きな探索で何も出ないのは、見立ての期待どおりであり、次の一個を期待するには上限を e 乗しなければならない。探索の上限を何桁伸ばしても、期待はほとんど増えない——「見つからない」は「無い」の証拠としては弱く、見立ての上ではまだいくらでも残っている。

6. 1/p² の条件との対照

計算 6.1：確率 $1/p^2$ で満たされると見立てられる条件、$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$ を $p \le 10^7$ で探すと、一つも無かった。$1/p^2$ の和は $p \le 10^7$ の全素数で **0.452247**、**3511** より上だけでは **0.000031369** だった。比べると、$1/p$ の和は 10^7 までで **3.041449** である。

> **観察 6.2**
>
> 確率が 1/p² なら、和は収束して有限個しか期待されない。全素数を足しても期待は **0.452247** で、大きな p にはほとんど残っていない——こちらの「無い」は、探索の上限の問題ではなく、見立ての上でも終わっている。

7. 分離子と、言わないこと

> **観察 7.1**
>
> 分離子は、確率が 1/p か 1/p² か。$1/p$ なら和は $\ln \ln x$ で発散し、どこまで探しても期待が残る。$1/p^2$ なら和は収束する——同じ「以外に存在するか」でも、どちらの和に当たるかで、見立ての答えは正反対になる。

> **観察 7.2**
>
> 言わないこと。無限にあることも、見立てが正しいことも証明しない。六つの条件が互いに独立だとも言わない——外の探索の方法にも入らない。

8. 点呼と結び

1. 期待の合計 **14.787410**、見つかった数 12、確率 **0.285599**（計算 3.1）：本稿の芯。
2. カイ二乗 **7.600438**・**12.176991**（計算 4.1）：商の余りは一様と崩れない。
3. 外の探索の期待 **1.128987**・**0.815749**、何も出ない確率 **0.323361**・**0.442308**（計算 5.1）：見つからないのは期待どおり。
4. 上限の e 乗、10 の **36.155948** 乗・**43.019732** 乗（計算 5.2）：次の一個まで。
5. $1/p^2$ の和 **0.452247**、3511 より上 **0.000031369**（計算 6.1）：収束する対照。

6. **1/p か 1/p² か**（観察 7.1）：**分離子・論文603・769**。

結び：「〜以外にもう無いか」の見立ての答えは ln ln x で、探す上限を e 乗しないと期待は一つも増えない。ウィーフェリッヒの四つの底、ウィルソン、ウォルステンホルムを自分で探し直すと合わせて 12 個が見つかり、1/p の和の期待 14.787410 と同じ大きさで、12 個以下になる確率は 0.285599 だった——商の余りは一様と崩れず（カイ二乗 7.600438・12.176991）、外の大きな探索で何も出ないのも期待 1.128987・0.815749 の範囲で、次の一個を期待するには上限を 10 の 36.155948 乗や 43.019732 乗まで伸ばさなければならない。確率が 1/p² の条件では和が 0.452247 に収束し、3511 より上には 0.000031369 しか残らない。分離子は、確率が 1/p か 1/p² か、和が発散するか収束するかである。既刊との位置——論文603 は 2 の p−1 乗を p で割った余りでフェルマーの判定を数え、論文769 は素数の平均の間隔が ln x に乗ることを数えた。ここでは、一段上の p² の余りと、その逆数の和の ln ln x という遅さを数えた。正直に言えば——新しい素数は一つも見つけておらず、無限にあるかどうかも分からないままである。

参考文献

1. Costa, E., Gerbicz, R., & Harvey, D. (2014). A search for Wilson primes. *Mathematics of Computation*.
2. Crandall, R., Dilcher, K., & Pomerance, C. (1997). A search for Wieferich and Wilson primes. *Mathematics of Computation*.
3. Dorais, F. G., & Klyve, D. (2011). A Wieferich prime search up to 6.7×10^{15}. *Journal of Integer Sequences*.
4. McIntosh, R. J. (1995). On the converse of Wolstenholme's theorem. *Acta Arithmetica*.
5. 山岸勇輝 (2026).『561 は、互いに素などの底で試しても、フェルマーの判定を通る』[論文603]. Zenodo.
6. 山岸勇輝 (2026).『素数の間隔の平均は ln x で当たるが、最大の間隔はその平均からどんどん離れていく』[論文769]. Zenodo.

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)