メルセンヌ素数は無数に、フェルマー素数は有限個と見立てられる——指数の増え方が和を分ける

— 小さい素数で割れない分を補正すると、メルセンヌ素数の期待は指数の上限が 10 倍になるたびに同じだけ増え、フェルマー数の期待は最初の十個ほどで尽きる — 分離子は、指数が一つずつ増えるか倍々に増えるか — [論文1018]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

2 の p 乗から 1 を引いた数（メルセンヌ数）の素数が無数にあるか、2 の 2 の n 乗 乗に 1 を足した数（フェルマー数）の素数が F4 より先にあるかは、どちらも未解決である。メルセンヌ素数が無数にあることは、偶数の完全数が無数にあることと同じ問いである。本稿は、素数判定を自分で走らせ、見立ての期待の和と並べる。新しい定理も法則も主張せず、どちらの答えも証明しない。 第一に、これが本稿の芯である。小さい素数で割れない分を補正すると、メルセンヌ素数の期待は見つかった数と合う——ルカ＝レーマー判定で p≤5000 に 20 個の指数（2 から 4423）が見つかった。約数が 2p+1 以上であることを補正に入れた期待は 21.287726、補正しなければ 3.469954 しかない（第2節・第3節）。 第二に、補正の大きさは、メルテンスの第三定理の e の γ 乗の形になる——2p 以下の素数で割れない割り増しと e の γ 乗×ln(2p) の比は、p＝13・521・4423 で 1.053422・1.004791・1.001136 だった（第3節）。 第三に、メルセンヌ素数の指数は、対数のはしごにほぼ等間隔に並ぶ——隣り合う指数の比の対数の平均は 0.405338（比 1.499810）で、見立ての間隔 ln2 を e の γ 乗で割った 0.389174（比 1.475761）と同じ大きさだった。期待は指数の上限が 10 倍になるたびに 5.916595 ずつ増える（第4節）。 第四に、フェルマー数では、期待の和が最初の十個ほどで尽きる——ペパンの判定で F0 から F4 は素数、F5 から F14 は合成数だった。約数の形で同じ補正を入れた n≥5 の期待は 0.890536 で、F14 まで調べ終えると残る期待は n≥15 の 0.001956745 だけである（第5節）。 第五に、補正しなければ、どちらの見立ても外れて見える——補正なしでは、メルセンヌ素数の期待は見つかった 20 個に対して 3.469954、フェルマー数の n≥5 の期待は 0.090168 で、割り増しは同じ仕組みから来る（第3節・第5節）。 第六に、分離子は、指数が一つずつ増えるか倍々に増えるか——メルセンヌ数の指数は素数の数だけ一つずつ増えるので和は対数で発散し、フェルマー数の指数は 2 の n 乗と倍々に増えるので和は収束する（第6節）。 キーワード：メルセンヌ素数、フェルマー数、ルカ＝レーマー判定、ペパンの判定、メルテンスの第三定理、完全数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ルカ＝レーマー判定、ペパンの判定、メルセンヌ数の約数が 2kp+1 の形でフェルマー数の約数が k 掛ける 2 の n+2 乗 +1 の形であること、偶数の完全数とメルセンヌ素数が一対一に対応すること（ユークリッドとオイラー）、メルテンスの第三定理、メルセンヌ素数の個数の見立て（ワグスタッフ、1983）は、いずれも既知である。どちらの答えも証明しない——補正した確率は見立てであり、無数か有限かは示さない。次の素数を予言しない——指数の並びの間隔は平均を見ただけで、どこに現れるかは言わない。奇数の完全数に立ち入らない——偶数の完全数との対応だけを使う。既刊との関係：論文810の射程注記は、メルセンヌ素数を論じない、その個数が有限か無限かにも素数判定の手順にも入らないと書いた——本稿はその席に座り、判定を走らせて個数の見立てを数える（先客なし）。論文1017 は、p² で割った余りの条件が確率 1/p で満たされ、期待が ln ln x で増えることを数えた——ここでは、形の決まった数の素数判定で、約数の形から来る補正を入れると、期待が指数の上限の対数で増えることと、フェルマー数では和が収束することを数える。加えたのは、判定を自分で走らせて見つかった数と補正ありなしの期待を並べたこと、補正がメルテンスの第三定理の形になることを数で確かめたこと、指数の比の対数の平均と見立ての間隔を比べたこと、フェルマー数で期待が最初の十個ほどで尽きることを数えたことである。

1. 記法と問い

設定：メルセンヌ数を $M_p = 2^p - 1$（p は素数）、フェルマー数を $F_n = 2^{2^n} + 1$ とする。M_p の約数は $2kp + 1$ の形、F_n の約数は $k \cdot 2^{n+2} + 1$ の形で、どちらも小さい素数では割れない。

問い：一方は無数に、他方は有限個と見立てられるのはなぜか。見立ての期待は、実際に見つかる数と合うか。

2. 判定を走らせる

計算 2.1：ルカ＝レーマー判定を $p \le 5000$ で走らせた（$p = 11$ の $2047 = 23 \times 89$ は落ち、$p = 13$ の 8191 は入ることを先に確かめた）。指数は 2・3・5・7・13・17・19・31・61・89・107・127・521・607・1279・2203・2281・3217・4253・4423 の 20 個だった。

3. 補正と期待

計算 3.1：素数定理の確率 $1/\ln M_p = 1/(p \ln 2)$ に、$2p$ 以下の素数で割れない割り増し $\prod_{q \le 2p} (1 - 1/q)^{-1}$ を掛ける。メルテンスの第三定理によりこれは $e^{\gamma} \ln(2p)$ に近い。

p	割り増し（積）	$e^{\gamma}\ln(2p)$	比
13	6.112911	5.802906	1.053422
521	12.435781	12.376489	1.004791
4423	16.204283	16.185889	1.001136

確率 $e^{\gamma}\ln(2p)/(p\ln 2)$（1 を超えるものは 1 に切る）を $p \le 5000$ で足すと 21.287726、補正しない $1/(p\ln 2)$ の和は 3.469954 で、見つかった数は 20 だった。$100 < p \le 5000$ だけでは、補正ありの期待 10.917833 に対して 10 個（比 0.915933）だった。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。小さい素数で割れない分を補正すると、期待は見つかった数と合う。補正しない素数定理の確率では、見つかった 20 個に対して 3.469954 しか期待されない——メルセンヌ数が素数になりやすいのは、約数が $2p+1$ より小さくなれないからで、その割り増しは $\ln(2p)$ に比例する。

4. 指数の並び

計算 4.1：隣り合う指数の比の対数を平均すると 0.405338（比 1.499810）だった。見立ての間隔は、期待が $\ln x$ あたり $e^{\gamma}/\ln 2 = 2.569544$ 増えることの逆数 $\ln 2/e^{\gamma} = 0.389174$（比 1.475761）である。最も狭い間は $2203 \to 2281$ の 0.034794、最も広い間は $127 \to 521$ の 1.411563 だった。

> **観察 4.2**
>
> メルセンヌ素数の指数は、対数のはしごにほぼ等間隔に並ぶ。期待は指数の上限の対数に比例し、上限が 10 倍になるたびに 5.916595 ずつ増える——どこまで伸ばしても同じだけ増えるので、和は発散し、無数にあると見立てられる。間隔には大きなばらつきがあり、次の位置は言えない。

5. フェルマー数

計算 5.1：ペパンの判定（$3^{(F_n-1)/2} \equiv -1 \pmod{F_n}$）で、$F_0$ から F_4 は素数、F_5 から F_{14} は合成数だった。約数が $k\cdot 2^{n+2}+1$ の形なので、同じ補正で確率はおよそ $e^{\gamma}(n+2)/2^n$ になる。$n \ge 5$ の和は 0.890536（補正なしなら 0.090168）、$n \ge 15$ だけなら 0.001956745 だった。

> **観察 5.2**
>
> フェルマー数では、期待の和が最初の十個ほどで尽きる。$n \geq 5$ の期待 **0.890536** のほとんどは F_5 から F_{14} にあり、そこを調べ終えると **0.001956745** しか残らない——指数が倍々に増えるので、確率が 2^n 分の 1 の速さで小さくなる。

6. 分離子と、言わないこと

> **観察 6.1**
>
> 分離子は、指数が一つずつ増えるか倍々に増えるか。メルセンヌ数の指数は素数を一つずつたどり、確率はおよそ $\ln p/p$ で、その和は $\ln x$ で発散する。フェルマー数の指数は 2^n と倍々に増え、確率はおよそ $n/2^n$ で、その和は収束する——同じ補正、同じ素数定理から、無数と有限の正反対の見立てが出る。

> **観察 6.2**
>
> 言わないこと。無数か有限かは証明しない。次のメルセンヌ素数がどこにあるかも言わない——奇数の完全数には入らない。

7. 点呼と結び

1. 補正ありの期待 **21.287726**、見つかった数 **20**、補正なし **3.469954**（計算 3.1）：本稿の芯。
2. 割り増しと e の γ 乗×ln(2p) の比 **1.053422・1.004791・1.001136**（計算 3.1）：メルテンスの第三定理。
3. 比の対数の平均 **0.405338**、見立て **0.389174**（計算 4.1）：対数のはしご。
4. **10** 倍ごとに **5.916595**（観察 4.2）：発散する。
5. フェルマー数の期待 **0.890536**、残り **0.001956745**（計算 5.1）：収束する。
6. 一つずつか倍々か（観察 6.1）：分離子・論文**810・1017**。

結び：メルセンヌ素数は無数に、フェルマー素数は有限個と見立てられる——指数の増え方が和を分ける。ルカ＝レーマー判定で **p≤5000** に **20** 個の指数が見つかり、約数が **2p+1** 以上であることを補正に入れた期待 **21.287726** と合った。補正しなければ **3.469954** しかなく、割り増しは e の γ 乗×ln(2p) の形（比 **1.001136** まで近づく）である——指数の比の対数の平均 **0.405338** は見立ての間隔 **0.389174** と同じ大きさで、期待は上限が **10**

倍になるたびに 5.916595 ずつ増える。フェルマー数では F5 から F14 が合成数で、n≥5 の期待 0.890536 のほとんどがそこで使われ、残りは 0.001956745 である。分離子は、指数が一つずつ増えるか倍々に増えるかである。既刊との位置——論文1017 は p² の余りの条件の期待が ln ln x で増えることを数えた。ここでは、論文810 が入らなかったメルセンヌ素数の個数を、判定を走らせて見立てと並べた。正直に言えば——無数にあるとも、有限個だとも、証明していない。

参考文献

1. Crandall, R., & Pomerance, C. (2005). *Prime Numbers: A Computational Perspective* (2nd ed.). Springer.
2. Wagstaff, S. S. (1983). Divisors of Mersenne numbers. *Mathematics of Computation*.
3. 山岸勇輝 (2026). 『等号にちょうど乗る数は百万までに四個しかないのに、すぐ上の不等号は四分の一を占める』[論文810]. Zenodo.
4. 山岸勇輝 (2026). 『「〜以外にもう無いか」の見立ての答えは ln ln x で、探す上限を e 乗しないと期待は一つも増えない』[論文1017]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22829416

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)