双子素数の逆数の和は収束するが、収束は双子素数が有限であることを意味しない

— 素数全部では ln ln x で発散する和が、双子素数では見立ての密度が ln x の二乗で薄まるので収束し、同じく収束する三つ組の素数は一組しかない — 分離子は、和が収束するか、集合が有限か —

[論文1019]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

差が 2 の素数の組（双子素数）が無数にあるかは未解決である。一方、その逆数の和が収束することは 1919 年にブルンが示した。ブルンの論文の題名は、この級数が「収束するか、有限である」と書いている。本稿は、収束と有限を分けて数える。新しい定理も法則も主張せず、双子素数が無数にあることも証明しない。 第一に、これが本稿の芯である。和は収束に向かうが、組の数は見立てどおり増え続ける——10^8 までの双子素数は 440312 組で、ハーディとリトルウッドの見立てとの比は **0.999873** だった。逆数の部分和は 10^6・10^7・10^8 で **1.710776931**・**1.738357044**・**1.758815621** とゆっくり増え、見立ての尾を足すと **1.901913354**・**1.902188264**・**1.902167939** にまとまる（第2節・第3節）。 第二に、収束は、ひどく遅い——10^8 まで足しても、見立ての尾 **0.143352318**（全体の **0.075363**）がまだ残る。尾を 0.01 より小さくするには、10 の **114.681854** 乗まで足さなければならない（第4節）。 第三に、素数全部の和は ln ln x で発散し、差は定数に落ち着く——10^8 までの素数の逆数の和は **3.174975**、ln ln x は **2.913474** で、差 **0.261501** は素数の積から出したマイセル＝メルテンスの定数 **0.261497213** に近づいた（第5節）。 第四に、収束する和は、有限の集合にもある——差が 2 ずつの三つ組 (p, p+2, p+4) の素数は、10^8 までに (3, 5, 7) の一組しかなく、その逆数の和 **0.676190** もやはり収束している。和が収束することは、無限の双子素数にも、有限の三つ組にも同じように言える（第6節）。 第五に、見立ての定数は自分で出した——双子素数の定数 C_2 を 10^7 までの奇素数の積から出すと **0.6601618197** だった（第2節）。 第六に、分離子は、和が収束するか、集合が有限か——双子素数の見立ての密度は 1 を ln x の二乗で割った速さで薄まるので、個数は増え続けても逆数の和は収束する。収束は数え方の性質で、集合が有限かどうかは別の問いである（第7節）。 キーワード：双子素数、ブルンの定理、ブルン定数、ハーディ＝リトルウッドの見立て、メルテンスの定理、逆数の和。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——双子素数の逆数の和が収束すること（ブルン、1919）、双子素数の数の見立てと定数 C_2（ハーディとリトルウッド、1923）、素数の逆数の和と $\ln\ln x$ の差が定数に近づくこと（メルテンス、1874）、双子素数を 10^{14} まで数えた和の見積もり（ナイスリー、1995）は、いずれも既知である。双子素数が無数にあることを証明しない——10^8 まで数えたことも、見立てと合うことも、証明にはならない。外挿は見立てに依る——尾を $4C_2/\ln x$ と置いたのはハーディとリトルウッドの見立てを使ったからで、その正しさは扱わない。ブルン定数の値を主張しない——外挿の値は見立ての上の値で、定数の桁を決めたとは言わない。既刊との関係：論文640 は、偶数を二つの素数の和で表す仕方の数が、小さな素数で割り切れるかで決まる倍率を持つことを数えた——ここでは、同じハーディとリトルウッドの見立てを、双子素数の組の数とその逆数の和の尾に使う。論文06 は、メルテンスの第二定理を 10^6 までの素数の逆数の和 2.887328 で確かめた——ここでは、同じ和を 10^8 まで伸ばし、発散する素数全部の和と収束する双子素数の和を並べる。論文1017 は、確率 1/p の条件の期待が $\ln\ln x$ で増えることを数えた——ここでは、同じ $\ln\ln x$ で発散する和から双子素数だけを取り出すと、和が収束することを数える。加えたのは、組の数と見立てを三つの範囲で比べたこと、部分和と外挿を並べ、収束の遅さを数えたこと、収束する和が有限の三つ組にもあることを示したこと、定数 C_2 とマイセル＝メルテンスの定数を素数から出したことである。

1. 記法と問い

設定：p と $p+2$ がどちらも素数の組を双子素数と呼び、x までの組の数を $\pi_2(x)$、逆数の和を $S(x)=\sum(1/p+1/(p+2))$ とする。ハーディとリトルウッドの見立てでは $\pi_2(x)$ は $2C_2\int_2^x dt/(\ln t)^2$ に近く、$C_2=\prod_{p\ge 3}(1-1/(p-1)^2)$ である。

問い：逆数の和が収束するなら、双子素数は有限個なのか。

2. 組の数と見立て

計算 2.1：10^8 までふるった（素数は 5761455 個）。C_2 を 10^7 までの奇素数の積から出すと 0.6601618197 だった。

x	組の数	見立て	比
10^6	8169	8248.030	0.990418
10^7	58980	58753.817	1.003850
10^8	440312	440367.797	0.999873

3. 部分和と外挿

計算 3.1：逆数の部分和に、見立ての尾 $4C_2/\ln x$ を足した。

x	部分和	尾の見立て	外挿
10^6	1.710776931	0.191136424	1.901913354
10^7	1.738357044	0.163831220	1.902188264
10^8	1.758815621	0.143352318	1.902167939

外挿の差は $10^6 \to 10^7$ で 2.749×10^{-4}、$10^7 \to 10^8$ で -2.033×10^{-5} だった。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。和は収束に向かうが、組の数は見立てどおり増え続ける。組の数は 10^8 までで 440312 組と増え続け、見立てとの比は 1 に近い。それでも逆数の和は、外挿が 1.901913354・1.902188264・1.902167939 とまとまっていく——個数が増え続けることと、和が収束することは、同時に起きている。

4. 収束の遅さ

計算 4.1：10^8 で残っている尾 0.143352318 は、外挿 1.902167939 の 0.075363 に当たる。尾が 0.10 を下回るには $\ln x > 26.406473$（x が 10 の 11.468185 乗）、0.01 を下回るには $\ln x > 264.064728$（10 の 114.681854 乗）が要る。

> **観察 4.2**
>
> 収束は、ひどく遅い。尾は $1/\ln x$ でしか縮まないので、部分和だけでは収束しているようにも発散しているようにも見える——収束と言えるのは、ブルンの証明があるからで、数えた部分和からではない。

5. 素数全部の和との比べ

計算 5.1：素数全部の逆数の和と $\ln\ln x$ を比べた。

x	$\sum 1/p$	$\ln\ln x$	差
10^6	2.887328	2.625792	0.261536
10^7	3.041449	2.779943	0.261507
10^8	3.174975	2.913474	0.261501

マイセル＝メルテンスの定数を $\gamma + \sum(\ln(1-1/p)+1/p)$（$p \le 10^8$）で出すと 0.261497213 だった。

> **観察 5.2**
>
> 素数全部の和は ln ln x で発散し、差は定数に落ち着く。素数の見立ての密度は $1/\ln x$ で、双子素数はそれを二乗した $1/(\ln x)^2$ の速さで薄まる——この一段の違いが、発散と収束を分ける。

6. 収束する和は有限の集合にもある

計算 6.1：p、$p+2$、$p+4$ がすべて素数の三つ組を 10^8 まで探すと、$(3,5,7)$ の一組だけだった（三つのうち一つは必ず 3 で割り切れる）。その逆数の和は 0.676190 である。比べとして、無限の集合 $1, 2, 3, \ldots$ の $1/n^2$ の和は $n \le 10^6$ で 1.644933067、$\pi^2/6 = 1.644934067$ に収束する。

> **観察 6.2**
>
> 収束する和は、有限の集合にも無限の集合にもある。三つ組の和は項が一つしかないので収束し、$1/n^2$ の和は項が無限にあっても収束する——ブルンの題名の「収束するか、有限である」は、この二つを区別していない。

7. 分離子と、言わないこと

> **観察 7.1**
>
> 分離子は、和が収束するか、集合が有限か。和の収束は、項がどれだけ速く小さくなるかの性質である。集合が有限かどうかは、項がいつか尽きるかの問いである——ブルンの定理は前者に答え、双子素数の予想は後者を問う。

> **観察 7.2**
>
> 言わないこと。双子素数が無数にあることは証明しない。外挿はハーディとリトルウッドの見立てに依る——ブルン定数の値を決めたとは言わない。

8. 点呼と結び

1. **440312** 組、見立てとの比 **0.999873**（計算 2.1）：数は増え続ける。
2. 部分和 **1.758815621**、外挿 **1.901913354 · 1.902188264 · 1.902167939**（計算 3.1）：本稿の芯。
3. 尾 **0.143352318**（**0.075363**）、**0.01** には **10** の **114.681854** 乗（計算 4.1）：ひどく遅い。
4. 素数全部 **3.174975**、差 **0.261501**、定数 **0.261497213**（計算 5.1）：発散する側。
5. 三つ組は **(3,5,7)** だけ、和 **0.676190**（計算 6.1）：有限でも収束。
6. 和が収束するか、集合が有限か（観察 7.1）：分離子・論文**640**・**06**・**1017**。

結び：双子素数の逆数の和は収束するが、収束は双子素数が有限であることを意味しない。10^8 までの双子素数は **440312** 組で見立てとの比 **0.999873**、逆数の部分和は **1.758815621** で、尾の見立てを足すと **1.902167939** にまとまる——それでも尾 **0.143352318** が残り、**0.01** まで縮めるには **10** の **114.681854** 乗まで足す必要がある。素数全部の和は **3.174975** で **ln ln x** と定数 **0.261497213** の差に落ち着き、三つ組の素数は **(3,5,7)** の一組で和 **0.676190** もやはり収束する。分離子は、和が収束するか、集合が有限かである。既刊との位置——論文**640** はハーディとリトルウッドの倍率を二つの素数の和で数え、論文**06** はメルテンスの第二定理を 10^6 まで確かめ、論文**1017** は **ln ln x** の遅さを数えた。ここでは、同じ **ln ln x** で発散する和から双子素数を取り出すと収束すること、そしてそれが有限を意味しないことを数えた。正直に言えば——双子素数が無数にあるかどうかは、少しも分かっていない。

参考文献

1. Brun, V. (1919). La série 1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+1/59+1/61+..., où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie. *Bulletin des Sciences Mathématiques*.
2. Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. (1923). Some problems of ‘Partitio numerorum’; III: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*.
3. Mertens, F. (1874). Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.
4. Nicely, T. R. (1995). Enumeration to 10^{14} of the twin primes and Brun’s constant. *Virginia Journal of Science*.
5. 山岸勇輝 (2026). 『臨界線と関数方程式の不動点』[論文06]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404262
6. 山岸勇輝 (2026). 『偶数を二つの素数の和に表す仕方の数は、3 で割り切れるかでおよそ 2 倍違う』[論文640]. Zenodo.

7. 山岸勇輝 (2026). 『「〜以外にもう無いか」の見立ての答えは ln ln x で、探す上限を e 乗しないと期待は一つも増えない』[論文1017]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22829416

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)