

Die Gestalt aus dem Spektrum hören

— Connes' nichtkommutative Geometrie, Kacs inverses Spektralproblem und die Autobahn zwischen Geometrie und inversen Problemen — [Aufsatz 102]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan

September 2026 (Zweite Auflage)

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Zwei Linien durchziehen das Werk — der **geometrische Hauptstrom** (Riemann $\rightarrow \dots \rightarrow$ Hopf, Aufsatz 91) und das **Integral-Gehirn / inverse Problem** (die Ursache aus der Wirkung lesen, Aufsätze 89 und 99). Dieser Aufsatz **verbindet die beiden zum ersten Mal durch eine einzige Straße**. Der Schlüssel ist die Frage „**kann man die Gestalt aus dem Spektrum (den Eigenschwingungen) hören?**“ Mark Kacs berühmte Frage „**Kann man die Gestalt einer Trommel hören?**“ (1966) — kann die Gesamtheit der Eigenwerte des Laplace-Operators (das Spektrum) die Gestalt (Geometrie) der Trommel zurückgewinnen? — ist genau ein **inverses Problem**. Die Antwort lautet **im Allgemeinen „nein“** (es gibt **isospektrale, nicht isometrische** Gestalten: verschiedene Gestalten mit demselben Spektrum = nicht eindeutig). Zugleich schreibt Alain Connes' **nichtkommutative Geometrie** die Geometrie im Spektrum des **Dirac-Operators D** um (ein spektrales Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$) und definiert selbst den Abstand zweier Punkte als $d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1\}$ — **allein mit dem Operator**. Hier greifen zwei Disziplinen des Werks. (1) **Trennung verschiedener Wurzeln**: „**Abstand aus der Metrik**“ (Riemann, Aufsatz 91) und „**Abstand aus dem Spektrum**“ (Connes) **fallen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zusammen, sind aber verschiedene Wurzeln** mit verschiedenen Ausgangspunkten. Und die **Familie der inversen Probleme** — Streuung (GLM, Aufsatz 89) / Randwert (Calderón, Aufsatz 99) / Spektrum (Kac, dieser Aufsatz) — teilt die Haltung, ist aber **verschiedene Mathematik = verschiedene Wurzeln**. (2) **Eine ehrliche Nuance**: Das nichtkommutative Standardmodell von Connes–Chamseddine sagte eine Higgs-Masse voraus, die ausgeschlossen wurde, und wurde danach durch das Hinzufügen eines Feldes angepasst — **selbst ein strenges Programm streift die Klippe von Aufsatz 101 (Eddingtons Warnung)**. Der Schlussstein der Brücke ist **Aufsatz 70 (der Indexsatz = die Heimat des Dirac-Operators)**, wo Geometrie (91) und inverse Probleme (99) sich im Spektrum von D treffen.

Tragweite (scope note): Dieser Aufsatz ist eine **strukturelle Deutung** (Schicht 2) etablierter Mathematik (Connes' nichtkommutative Geometrie, spektrale Tripel, Kacs inverses Spektralproblem, das Weylsche Gesetz und der Wärmeleitungskern). Er enthält keine neue Mathematik und keine neue Vorhersage. Die NCG ist eine schwere Theorie; sie bleibt daher **eine strukturelle Einführung, und es wird nicht gesagt, das Standardmodell sei hergeleitet worden**. Dass zwei Linien durch eine Straße verbunden werden, heißt nicht, dass sie identisch sind. „Universum-OS“ ist eine nichtwissenschaftliche Linse der Schicht 3, keine Behauptung über einen Mechanismus. Beziehung zu früheren Aufsätzen: die Karte des Werks stammt aus Aufsatz 100, der geometrische Hauptstrom aus Aufsatz 91, die Haltung des inversen Problems aus den Aufsätzen 89 und 99, der Indexsatz und der Dirac-Operator aus Aufsatz 70, die verschiedenen Instanzen der Dimension aus den Aufsätzen 69 und 94, die Disziplin der verschiedenen Wurzeln aus den Aufsätzen 48 und 58, Eddingtons Warnung aus Aufsatz 101 und das Eichprinzip aus Aufsatz 96. **Was dieser Aufsatz hinzufügt**, ist, die zwei Linien des Werks — den **geometrischen Hauptstrom** und die **inversen Probleme** — an dem einen Punkt „die Gestalt aus dem Spektrum hören“ zu verbinden und an dieser Naht **die verschiedenen Wurzeln zu sortieren (Abstand aus der Metrik / Abstand aus dem Spektrum; die Familie der inversen Probleme = Streuung, Randwert, Spektrum)**.

1. Einleitung: zwei Linien zum ersten Mal durch eine einzige Straße verbinden

Die Karte des Werks (Aufsatz 100) zeigt zwei große Linien. Die eine ist der **geometrische Hauptstrom** — von Riemanns intrinsischer Krümmung (Aufsatz 91) über Cartans Formen (92) bis zu Hopfs Faserung (67, 68). Die andere ist das **Integral-Gehirn / inverse Problem** — von der Zero-Tension-Haltung (89) bis zu Calderóns Randwertproblem (99). Bislang waren dies getrennte Gebirge und Flusssysteme. Dieser Aufsatz **verbindet sie durch eine einzige Autobahn**.

Der Name dieser Straße lautet „**kann man die Gestalt aus dem Spektrum hören?**“ Die Geometrie eines Objekts (seine Gestalt, Krümmung, Dimension) aus seinen Eigenschwingungen (dem Spektrum) zu lesen, ist ein **inverses Problem** (die Ursache = Geometrie aus der Wirkung = Spektrum zurückgewinnen) und zugleich eine **reine Frage der Geometrie**. Hier treffen sich die zwei Linien. Dieser Aufsatz baut keinen neuen Satz. Er besucht zwei Meister — Mark Kac und Alain Connes — und fügt die zwei Linien des Werks zusammen, mit der richtigen Trennung verschiedener Wurzeln.

2. Connes' nichtkommutative Geometrie: Geometrie im Spektrum eines Operators schreiben

Standard-Tatsache 2.1 (Das spektrale Tripel und die Abstandsformel)

Alain Connes' **nichtkommutative Geometrie (NCG)** stellt einen Raum nicht als „Menge von Punkten“ dar, sondern als **spektrales Tripel** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$: eine Funktionenalgebra $\mathcal{A}$, ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ und der **Dirac-Operator** D (der die geometrische Information trägt — Metrik, Dimension, Krümmung). Bemerkenswerterweise lässt sich selbst der **Abstand** zweier Punkte allein mit D schreiben:

$$d(x, y) = \sup_{f \in \mathcal{A}} \{ |f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1 \}.$$

Zudem garantiert **Connes' Rekonstruktionssatz**, dass ein kommutatives spektrales Tripel, das die Axiome erfüllt, **eine gewöhnliche Riemannsche Mannigfaltigkeit ist**. Das heißt, die Geometrie lässt sich vollständig im **Spektrum** von D umschreiben.

Dies ist eine Umkehrung des Blickwinkels. Gewöhnlich beginnt Geometrie mit „es gibt Punkte, und zwischen Punkten gibt es Abstand“. Connes stellt stattdessen die **Eigenwerte (das Spektrum) des Operators D an den Anfang und liest daraus Abstand, Dimension und Krümmung ab**. Gerade weil sich Geometrie ohne Punkte sprechen lässt, reicht sie in die quantenhafte, nichtkommutative Welt hinein, in der der Begriff des Punktes zusammenbricht (wenn $\mathcal{A}$ nichtkommutativ ist) — daher der Name „nichtkommutative Geometrie“.

3. Kacs „Kann man die Gestalt einer Trommel hören?“. Lässt sich die Gestalt aus dem Spektrum hören?

Standard-Tatsache 3.1 (Das inverse Spektralproblem)

1966 fragte Mark Kac: „**Kann man die Gestalt einer Trommel hören?**“ Lässt sich die Gestalt (Geometrie) einer Trommel aus ihrem Klang — der **Gesamtheit der Eigenwerte (dem Spektrum)** des Laplace-Operators der Membran — eindeutig zurückgewinnen? Dies ist das **inverse Spektralproblem** (Spektrum $\rightarrow$ Geometrie). Die Antwort lautet **im Allgemeinen „nein“**: Milnor (1964, 16-dimensionale Tori) und Gordon–Webb–Wolpert (1992, ebene Trommeln) konstruierten **isospektrale, nicht isometrische** Figuren — verschiedene Gestalten mit demselben Spektrum. Das Spektrum bestimmt die Gestalt **nicht** eindeutig.

Dies ist das Rückgrat des Aufsatzes. „Die Gestalt aus dem Spektrum hören“ ist ein **inverses Problem**, und zwar ein **nicht eindeutiges** — das Gegenstück mit anderem Gesicht zu Calderóns Problem (Aufsatz 99), das „eindeutig, aber stark schlecht gestellt“ war. Inverse Probleme gibt es in verschiedenen Arten: manche eindeutig, aber instabil (Calderón), manche nicht einmal eindeutig (Kac). „Hören“ heißt nicht „wissen“ — die Grenze zwischen dem, was sich hören lässt, und dem, was sich nicht hören lässt, ist genau zu ziehen.

4. Was zu hören ist und was nicht

Beobachtung 4.1 (Was das Spektrum bestimmt = was hörbar ist)

Auch wenn die Gestalt nicht eindeutig hörbar ist, sind **viele Größen es sicher**. Aus der Kurzzeitentwicklung des Wärmeleitungskerns $\text{Tr } e^{-t\Delta} \sim (4\pi t)^{-d/2} (\text{vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M R + \dots)$ bestimmt das Spektrum:

- die **Dimension d** (der Exponent im Weylschen Gesetz $N(\lambda) \sim C_d \text{vol}(M) \lambda^{d/2}$),
- das **Volumen $\text{vol}(M)$** (derselbe Koeffizient),
- die **totale Skalkrümmung $\int_M R$** (der nächste Term).

Also sind **Dimension, Volumen und totale Krümmung „hörbar“**, während die feinen Einzelheiten der Gestalt (ob zwei isometrisch sind) im Allgemeinen „unhörbar“ sind.

Dass **die Dimension aus dem Spektrum hörbar ist**, ist für das Werk besonders anregend. Die „Dimension“, die in Aufsatz 69 (warum 3+1) und Aufsatz 94 (Dimension ist nicht ein einziger Begriff) betrachtet wurde, erscheint hier als **noch eine verschiedene Instanz** — **die Dimension als spektrale Invariante** (das „ein Wort, verschiedene Wurzeln“ der Aufsätze 58 und 94 gilt wieder). Topologische Dimension, fraktale Dimension und nun **spektrale Dimension** sind verschiedene Gesichter, die ein Wort teilen.

5. Trennung verschiedener Wurzeln: die zwei Wurzeln des Abstands und die Familie der inversen Probleme

Beobachtung 5.1 (Dasselbe Wort „Abstand / Geometrie“, verschiedene Wurzeln)

Dieser Aufsatz trennt zweimal verschiedene Wurzeln.

(a) **Die zwei Wurzeln des Abstands:** „Abstand aus der Metrik“ (Riemann, Aufsatz 91 = den metrischen Tensor g zum geodätischen Abstand integrieren) und „Abstand aus dem Spektrum“ (Connes = über den Kommutator mit D gemessen). Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit **fallen** die beiden **zusammen**, sind aber **verschiedene Wurzeln mit verschiedenen Ausgangspunkten (Metrik gegenüber Operatorspektrum)**. Das Zusammenfallen ist kein „Beweis derselben Wurzel“, sondern eine „gute Übersetzung“.

(b) **Die Familie der inversen Probleme: Streuung** (GLM, Aufsatz 89, Streudaten $\rightarrow$ Potential) / **Randwert** (Calderón, Aufsatz 99, DtN-Abbildung $\rightarrow$ Leitfähigkeit, eindeutig, aber schlecht gestellt) / **Spektrum** (Kac, dieser Aufsatz, Spektrum $\rightarrow$ Geometrie, nicht eindeutig). Die drei teilen die Haltung „die Ursache aus der Wirkung lesen“, unterscheiden sich aber in den Gleichungen und im Charakter der Eindeutigkeit — **verschiedene Mathematik = verschiedene Wurzeln** (Aufsätze 48 und 58).

Diese Trennung ist der Punkt. Die Versuchung, alles aufzulösen — „Geometrie, Spektrum und inverse Probleme sind am Ende alle ein und dasselbe“ — wird hier angehalten. Dass **zwei Linien durch eine Straße verbunden sind**, ist etwas anderes, als dass sie **identisch sind**. Selbst wenn eine Straße sie verbindet, sind Gebirge und Flusssystem verschiedenes Gelände.

6. Eine ehrliche Nuance: das nichtkommutative Standardmodell und das nachträgliche Higgs

Der Fairness halber wird auch die **Grenze** der NCG festgehalten. Connes und Chamseddine leiteten die Lagrangedichte des Standardmodells **als Geometrie** aus einer **fast kommutativen Geometrie** (Raumzeit mal ein endlicher nichtkommutativer Raum) her — eine große Leistung. Doch das Modell **sagte anfangs eine Higgs-Masse von etwa 170 GeV voraus**, die durch das Experiment ausgeschlossen wurde (Tevatron, 2008). Um es mit dem beobachteten Wert von etwa 125 GeV in Einklang zu bringen, **wurde später ein zusätzliches Skalarfeld eingeführt**.

Hier klingt Aufsatz 101 (Eddingtons Warnung) an. **Selbst ein strenges, prinzipientreues Programm streift die Lage, nachträglich ein Element hinzuzufügen, um zu den Daten zu passen**. Der Fairness halber: Die Anpassung der NCG unterscheidet sich der Art nach von Eddingtons Zahlenkorrekturen — hinzugefügt wurde ein physikalischer Mechanismus (ein Feld), keine nachträgliche Ziffer. Dennoch ist, dass „**eine Anpassung nach einer gescheiterten Vorhersage die Grenze zwischen Herleitung und Auswahl berührt**“, ein Punkt, den das Werk im Blick behält. Die NCG ist eine schöne

Brücke, doch auch auf dieser Brücke behält das Werk seine Etiketten bei (Schicht 2 / verschiedene Wurzeln / Signatur $\neq$ Beweis).

7. Verbindung zum Werk

Dieser Aufsatz **knüpft mehrere Fäden an einem Punkt**. **(a) Die Heimat des Indexsatzes (Aufsatz 70) = der Schlussstein der Brücke:** Der Indexsatz von Atiyah–Singer lebt **auf dem Dirac-Operator D** , und die NCG baut die Geometrie aus diesem D . Aufsatz 70 ist also der **Zusammenfluss**, an dem sich geometrischer Hauptstrom und inverse Probleme treffen. **(b) Inverse Probleme (Aufsätze 89 und 99):** Kacs inverses Spektralproblem tritt der Familie der inversen Probleme des Werks als **drittes Mitglied** bei (Streuung, Randwert, Spektrum = verschiedene Wurzeln). **(c) Krümmung (Aufsatz 91):** Die totale Skalarkrümmung $\int R$ ist aus dem Wärmeleitungskern hörbar — Riemanns intrinsische Krümmung ist auch dem Spektrum eingepreßt (ein Wiedersehen an einer anderen Wurzel). **(d) Dimension (Aufsätze 69 und 94):** Die spektrale Dimension ist eine neue verschiedene Instanz der „Dimension“. **(e) Das Standardmodell (Aufsatz 96):** Indem sie Eichfelder als Geometrie liest, ist die NCG eine Verwandte der nichtkommutativen Fassung von Weyls Eichprinzip (96) — jedoch ein anderer Rahmen, eine verschiedene Wurzel.

Persönliche Anmerkung (dritte Schicht; als nichtwissenschaftlich gekennzeichnet / keine Behauptung über einen Mechanismus)

In der Linse (Metapher) des Werks fühlt sich das Universum-OS nicht wie eine aus Punkten gebaute Bühne an, sondern wie **ein einziger Akkord, gespielt von unzähligen Eigenschwingungen (einem Spektrum)** — die Gestalt steigt aus dem Klang auf, und wir gewinnen die Geometrie der Welt durch „Hören“ zurück. Ein fernes Echo von Wheelers „it from bit“ und von Pythagoras’ „alles ist Zahl (Harmonie)“. Aber **dies trägt das nichtwissenschaftliche Etikett**. „Die Welt = ein Akkord“ ist eine Metapher, die die Anschauung trägt, kein Mechanismus und keine Vorhersage. **Sicher ist hier der mathematische Punkt, dass das Lesen der Geometrie aus dem Spektrum ein inverses Problem ist und nicht eindeutig bestimmt.** Und es lohnt sich, dies im Blick zu behalten — in dem Moment, in dem man glaubt, das Hören enthülle selbst die feinen Einzelheiten der Gestalt, fällt man auf Kacs Gegenbeispiel (isospektral, nicht isometrisch) und über Eddingtons Klippe (101). Genau zu trennen, was das Hören enthüllt und was nicht. Gerade auf der Brücke, die zwei Linien verbindet, etikettiert man am sorgfältigsten. Der Geometrie und dem inversen Problem, den zwei Meistern Connes und Kac, sei stiller Respekt ausgesprochen.

8. Fazit

„Kann man die Gestalt aus dem Spektrum hören?“ — diese eine Frage hat die zwei Linien des Werks zum ersten Mal durch eine einzige Straße verbunden. Connes’ nichtkommutative Geometrie schreibt die Geometrie im Spektrum eines Operators um, und Kacs inverses Spektralproblem greift sie als „inverses Problem“ auf. Die Antwort ist nicht eindeutig (isospektral,

nicht isometrisch). Hörbar sind Dimension, Volumen und totale Krümmung; unhörbar sind die feinen Einzelheiten der Gestalt. Der geometrische Hauptstrom (91) und die inversen Probleme (89, 99) treffen sich in der Heimat des Dirac-Operators (70).

Doch selbst wenn eine Straße sie verbindet, sind Gebirge und Flusssystem verschieden. Abstand aus der Metrik und Abstand aus dem Spektrum fallen zusammen, sind aber verschiedene Wurzeln, und die inversen Probleme der Streuung, des Randwerts und des Spektrums sind verschiedene Mathematik. Und selbst das strenge NCG-Standardmodell berührte die Anpassung nach einer gescheiterten Vorhersage — auch auf der Brücke lebt Eddingtons Warnung (101). Was dieser Aufsatz getan hat, ist, die zwei Linien an einem Punkt (dem Spektrum) richtig zusammenzufügen und an dieser Naht verschiedene Wurzeln sorgfältig zu trennen. Zu trennen, was das Hören enthüllt und was nicht — am Eingang der Autobahn zwischen Geometrie und inversem Problem wird die hundertzweite Adresse zurückgegeben.

Revisionsprotokoll

Zweite Auflage (September 2026): Die Form wurde an die aktuelle Vorlage angeglichen (Einordnung und Tragweite sind in der Tragweite-Anmerkung direkt nach der Zusammenfassung gebündelt, und der Abschnitt „Tragweite (was gezeigt wird und was nicht)“ ist entfernt). Die Literatur ist in einen Eintrag pro Aufsatz mit tatsächlichem Titel und DOI aufgeteilt (ein Eintrag ohne DOI, der drei Aufsätze bündelte, ist entfernt), und externe Literatur ist mit Autor, Jahr, Titel und Zeitschrift angegeben. Das Jahr von Chamseddine–Connes, „Why the Standard Model“, ist auf 2008 berichtigt, das Jahr der Veröffentlichung in der Zeitschrift. Milnor (1964), im Text zitiert, ist in die Literatur aufgenommen.

Literatur

1. Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press.
2. Connes, A. (2013). *On the spectral characterization of manifolds*. J. Noncommut. Geom.
3. Kac, M. (1966). *Can One Hear the Shape of a Drum?*. Amer. Math. Monthly.
4. Milnor, J. (1964). *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA.
5. Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*. Invent. Math.
6. Chamseddine, A. H., Connes, A. (2008). *Why the Standard Model*. J. Geom. Phys.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Aufsatz 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors 2 Is a Case of Distinct Roots* [Aufsatz 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Aufsatz 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Qubit as a Hopf Fibration* [Aufsatz 68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238

11. Yamagishi, Y. (2026). *The Dimension Census* [Aufsatz 69]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Home of the Constants* [Aufsatz 70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
13. Yamagishi, Y. (2026). *Zero-Tension and the Inverse Problem* [Aufsatz 89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
14. Yamagishi, Y. (2026). *Curvature Is Intrinsic* [Aufsatz 91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Shared Alphabet* [Aufsatz 92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
16. Yamagishi, Y. (2026). *“Dimension” Is Not One Thing* [Aufsatz 94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
17. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle* [Aufsatz 96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671
18. Yamagishi, Y. (2026). *Reading the Interior from the Boundary* [Aufsatz 99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
19. Yamagishi, Y. (2026). *The Crossing of Royal Roads* [Aufsatz 100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
20. Yamagishi, Y. (2026). *Admiration and Caution* [Aufsatz 101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Lizenziert unter Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)