

Entendre la forme à partir du spectre

— La géométrie non commutative de Connes, le problème spectral inverse de Kac, et l'autoroute reliant
géométrie et problèmes inverses — [Article 102]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

Deux lignées traversent le corpus — le **courant principal géométrique** (Riemann $\rightarrow \dots \rightarrow$ Hopf, Article 91) et le **cerveau intégral / problème inverse** (lire la cause à partir de l'effet, Articles 89 et 99). Cet article **relie les deux, pour la première fois, par une seule route**. La clef est la question « **peut-on entendre la forme à partir du spectre (les vibrations propres) ?** » La célèbre question de Mark Kac « **Peut-on entendre la forme d'un tambour ?** » (1966) — l'ensemble des valeurs propres du laplacien (le spectre) permet-il de retrouver la forme (la géométrie) du tambour ? — est exactement un **problème inverse**. La réponse est **en général « non »** (il existe des formes **isospectrales non isométriques** : des formes différentes de même spectre = pas d'unicité). Parallèlement, la **géométrie non commutative** d'Alain Connes réécrit la géométrie dans le spectre de l'**opérateur de Dirac D** (un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$), et définit même la distance entre deux points par $d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1\}$ — à l'aide du seul opérateur. Ici s'appliquent deux disciplines du corpus. (1) **Séparation des racines distinctes** : « la distance à partir de la métrique » (Riemann, Article 91) et « la distance à partir du spectre » (Connes) **coïncident sur une variété riemannienne, mais sont des racines distinctes** aux points de départ différents. Et la **famille des problèmes inverses** — diffusion (GLM, Article 89) / valeur au bord (Calderón, Article 99) / spectral (Kac, cet article) — partage la posture mais relève de **mathématiques différentes = racines distinctes**. (2) **Une nuance honnête** : le modèle standard non commutatif de Connes–Chamseddine a prédit une masse du Higgs qui a été exclue, puis a été ajusté par l'ajout après coup d'un champ — **même un programme rigoureux frôle la falaise de l'Article 101 (la mise en garde d'Eddington)**. La clef de voûte du pont est l'**Article 70 (le théorème de l'indice = la demeure de l'opérateur de Dirac)**, où la géométrie (91) et les problèmes inverses (99) se rencontrent sur le spectre de D .

Portée (scope note) : Cet article est une **interprétation structurelle** (couche 2) de mathématiques établies (la géométrie non commutative de Connes, les triplets spectraux, le problème spectral inverse de Kac, la loi de Weyl et le noyau de la chaleur). Il ne contient aucune mathématique nouvelle ni aucune prédiction nouvelle. La GNC est une théorie lourde ; elle reste donc **une introduction structurelle, et il n'est pas dit que le modèle standard ait été dérivé**. Que deux lignées soient reliées par une route ne signifie pas qu'elles soient identiques. « OS de l'Univers » est une lentille non scientifique de la couche 3, non une affirmation de mécanisme. Relation avec les articles antérieurs : la carte du corpus vient de l'Article 100, le courant principal géométrique de l'Article 91, la posture du problème inverse des Articles 89 et 99, le théorème de l'indice et l'opérateur de Dirac de l'Article 70, les instances distinctes de la dimension des Articles 69 et 94, la discipline des racines distinctes des Articles 48 et 58, la mise en garde d'Eddington de l'Article 101, et le principe de jauge de l'Article 96. **Ce que cet article ajoute**, c'est de relier les deux lignées du corpus — le **courant principal géométrique** et les **problèmes inverses** — au point unique « entendre la forme à partir du spectre », et, à cette couture, de **trier les racines distinctes (distance à partir de la métrique / distance à partir du spectre ; la famille des problèmes inverses = diffusion, valeur au bord, spectral)**.

1. Introduction : relier deux lignées par une seule route, pour la première fois

La carte du corpus (Article 100) montre deux grandes lignées. L'une est le **courant principal géométrique** — de la courbure intrinsèque de Riemann (Article 91) aux formes de Cartan (92) et à la fibration de Hopf (67, 68). L'autre est le **cerveau intégral / problème inverse** — de la posture Zero-Tension (89) au problème aux limites de Calderón (99). Jusqu'ici, c'étaient des chaînes de montagnes et des réseaux hydrographiques séparés. Cet article **les relie par une seule autoroute**.

Le nom de cette route est « **peut-on entendre la forme à partir du spectre ?** » Lire la géométrie d'un objet (sa forme, sa courbure, sa dimension) à partir de ses vibrations propres (son spectre) est un **problème inverse** (retrouver la cause = la géométrie à partir de l'effet = le spectre) et, en même temps, une **question purement géométrique**. Les deux lignées se rencontrent ici. Cet article ne construit aucun théorème nouveau. Il rend visite à deux maîtres — Mark Kac et Alain Connes — et greffe l'une sur l'autre les deux lignées du corpus, avec la séparation correcte des racines distinctes.

2. La géométrie non commutative de Connes : écrire la géométrie dans le spectre d'un opérateur

Fait standard 2.1 (Le triplet spectral et la formule de la distance)

La **géométrie non commutative (GNC)** d'Alain Connes représente un espace non comme un « ensemble de points » mais comme un **triplet spectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$: une algèbre de fonctions $\mathcal{A}$, un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et l'**opérateur de Dirac** D (qui porte l'information géométrique — métrique, dimension, courbure). Fait remarquable, même la **distance** entre deux points peut s'écrire à l'aide du seul D :

$$d(x, y) = \sup_{f \in \mathcal{A}} \{ |f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1 \}.$$

De plus, le **théorème de reconstruction de Connes** garantit qu'un triplet spectral commutatif satisfaisant les axiomes **est une variété riemannienne ordinaire**. Autrement dit, la géométrie peut être entièrement réécrite dans le **spectre** de D .

C'est un renversement du point de vue. D'ordinaire, la géométrie commence par « il y a des points, et entre les points il y a une distance ». Connes place au contraire **les valeurs propres (le spectre) de l'opérateur D en premier, et en lit la distance, la dimension et la courbure**. C'est précisément parce que la géométrie peut se dire sans points qu'elle s'étend au monde quantique et non commutatif où la notion de point s'effondre (lorsque $\mathcal{A}$ est non commutative) — d'où le nom de « géométrie non commutative ».

3. « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? » de Kac : la forme s'entend-elle à partir du spectre ?

Fait standard 3.1 (Le problème spectral inverse)

En 1966, Mark Kac demanda : « **Peut-on entendre la forme d'un tambour ?** » Peut-on retrouver de manière unique la forme (la géométrie) d'un tambour à partir de son son — l'**ensemble des valeurs propres (le spectre)** du laplacien de la membrane ? C'est le **problème spectral inverse** (spectre $\rightarrow$ géométrie). La réponse est **en général « non »** : Milnor (1964, tores de dimension 16) et Gordon–Webb–Wolpert (1992, tambours plans) ont construit des figures **isospectrales non isométriques** — des formes différentes de même spectre. Le spectre ne détermine **pas** la forme de manière unique.

C'est la colonne vertébrale de l'article. « Entendre la forme à partir du spectre » est un **problème inverse**, et de surcroît un problème **sans unicité** — le pendant, sous un autre visage, du problème de Calderón (Article 99), qui était « unique mais sévèrement mal posé ». Les problèmes inverses sont de plusieurs sortes : certains uniques mais instables (Calderón), d'autres même pas uniques (Kac). « Entendre » ne veut pas dire « connaître » — la frontière entre ce qui s'entend et ce qui ne s'entend pas est à tracer exactement.

4. Ce qui s'entend, et ce qui ne s'entend pas

Observation 4.1 (Ce que le spectre détermine = ce qui est audible)

Même si la forme n'est pas audible de manière unique, **bien des grandeurs le sont assurément**. Du développement en temps court du noyau de la chaleur $\text{Tr } e^{-t\Delta} \sim (4\pi t)^{-d/2} (\text{vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M R + \dots)$, le spectre détermine :

- la **dimension** d (l'exposant de la loi de Weyl $N(\lambda) \sim C_d \text{vol}(M) \lambda^{d/2}$),
- le **volume** $\text{vol}(M)$ (le même coefficient),
- la **courbure scalaire totale** $\int_M R$ (le terme suivant).

Ainsi, **la dimension, le volume et la courbure totale sont « audibles »**, tandis que les détails fins de la forme (deux formes sont-elles isométriques ?) sont en général « inaudibles ».

Que **la dimension soit audible à partir du spectre** est particulièrement suggestif pour le corpus. La « dimension » vue dans l'Article 69 (pourquoi 3+1) et l'Article 94 (la dimension n'est pas un seul concept) apparaît ici comme **encore une instance distincte — la dimension comme invariant spectral** (le « un mot, des racines distinctes » des Articles 58 et 94 s'applique de nouveau). La dimension topologique, la dimension fractale et maintenant la **dimension spectrale** sont des visages distincts partageant un mot.

5. Séparation des racines distinctes : les deux racines de la distance, et la famille des problèmes inverses

Observation 5.1 (Même mot « distance / géométrie », racines distinctes)

Cet article sépare deux fois des racines distinctes.

(a) **Les deux racines de la distance** : « la distance à partir de la métrique » (Riemann, Article 91 = intégrer le tenseur métrique g pour obtenir la distance géodésique) et « la distance à partir du spectre » (Connes = mesurée via le commutateur avec D). Sur une variété riemannienne, les deux **coïncident**, mais ce sont des **racines distinctes aux points de départ différents (métrique contre spectre d'opérateur)**. La coïncidence n'est pas une « preuve de la même racine » mais une « bonne traduction ».

(b) **La famille des problèmes inverses** : **diffusion** (GLM, Article 89, données de diffusion $\rightarrow$ potentiel) / **valeur au bord** (Calderón, Article 99, application $DtN \rightarrow$ conductivité, unique mais mal posé) / **spectral** (Kac, cet article, spectre $\rightarrow$ géométrie, sans unicité). Les trois partagent la posture « lire la cause à partir de l'effet », mais différent par les équations et par la nature de l'unicité — **mathématiques différentes = racines distinctes** (Articles 48 et 58).

Cette séparation est le point essentiel. La tentation de tout dissoudre — « géométrie, spectre et problèmes inverses ne font finalement qu'un » — est arrêtée ici. Que **deux lignées soient reliées par une route** est autre chose que **leur identité**. Même quand une route les relie, la chaîne de montagnes et le réseau hydrographique sont des terrains différents.

6. Une nuance honnête : le modèle standard non commutatif et le Higgs après coup

En toute équité, la **limite** de la GNC est aussi consignée. Connes et Chamseddine ont dérivé le lagrangien du modèle standard **comme géométrie** à partir d'une **géométrie presque commutative** (l'espace-temps multiplié par un espace non commutatif fini) — une réalisation majeure. Mais le modèle **prédisait initialement une masse du Higgs d'environ 170 GeV**, exclue par l'expérience (Tevatron, 2008). Pour le rendre compatible avec la valeur observée d'environ 125 GeV, **un champ scalaire supplémentaire a ensuite été introduit**.

Ici résonne l'Article 101 (la mise en garde d'Eddington). **Même un programme rigoureux et fondé sur des principes frôle la situation où l'on ajoute après coup un élément pour coller aux données**. En toute équité, l'ajustement de la GNC diffère en nature des retouches numériques d'Eddington — ce qui a été ajouté est un mécanisme physique (un champ), non un chiffre après coup. Reste que « **l'ajustement après une prédiction manquée touche la frontière entre dérivation et sélection** » est un point que le corpus garde à l'esprit. La GNC est un beau pont, mais même sur ce pont le corpus maintient ses étiquettes (couche 2 / racines distinctes / signature $\neq$ preuve).

7. Lien avec le corpus

Cet article **noie plusieurs fils en un point**. (a) **La demeure du théorème de l'indice (Article 70) = la clef de voûte du pont** : le théorème de l'indice d'Atiyah–Singer vit **sur l'opérateur de Dirac D** , et la GNC **construit** la géométrie à partir de ce même D . L'Article 70 est donc le **confluent** où se rencontrent le courant principal géométrique et les problèmes inverses. (b) **Problèmes inverses (Articles 89 et 99)** : le problème spectral inverse de Kac rejoint la famille des problèmes inverses du corpus comme **troisième membre** (diffusion, valeur au bord, spectral = racines distinctes). (c) **Courbure (Article 91)** : la courbure scalaire totale $\int R$ est audible par le noyau de la chaleur — la courbure intrinsèque de Riemann est aussi imprimée dans le spectre (des retrouvailles sur une autre racine). (d) **Dimension (Articles 69 et 94)** : la dimension spectrale est une nouvelle instance distincte de la « dimension ». (e) **Le modèle standard (Article 96)** : en lisant les champs de jauge comme géométrie, la GNC est une parente de la version non commutative du principe de jauge de Weyl (96) — mais c'est un autre cadre, une racine distincte.

Réflexion personnelle (couche 3 ; étiquetée non scientifique / aucune affirmation de mécanisme)

Dans la lentille (métaphore) du corpus, l'OS de l'Univers apparaît non comme une scène faite de points mais comme **un seul accord joué par d'innombrables vibrations propres (un spectre)** — la forme s'élève du son, et nous retrouvons la géométrie du monde en « entendant ». Un écho lointain du « it from bit » de Wheeler et du « tout est nombre (harmonie) » de Pythagore. Mais **ceci porte l'étiquette non scientifique**. « Le monde = un accord » est une métaphore qui porte l'intuition, non un mécanisme ni une prédiction. **Ce qui est certain ici, c'est le point mathématique selon lequel lire la géométrie à partir du spectre est un problème inverse, et non déterminé de manière unique**. Et il vaut la peine de le garder à l'esprit — au moment où l'on croit que l'écoute révèle jusqu'aux détails fins de la forme, on tombe sur le contre-exemple de Kac (isospectral non isométrique) et du haut de la falaise d'Eddington (101). Séparer exactement ce que l'écoute révèle de ce qu'elle ne révèle pas. C'est précisément sur le pont qui relie deux lignées que l'on étiquette avec le plus de soin. À la géométrie et au problème inverse, aux deux maîtres Connes et Kac, un respect tranquille est consigné.

8. Conclusion

« Peut-on entendre la forme à partir du spectre ? » — cette seule question a relié pour la première fois les deux lignées du corpus par une seule route. La géométrie non commutative de Connes réécrit la géométrie dans le spectre d'un opérateur, et le problème spectral inverse de Kac la reprend comme « problème inverse ». La réponse n'est pas unique (isospectral non isométrique). Sont audibles la dimension, le volume et la courbure totale ; inaudibles, les détails fins de la forme. Le courant principal géométrique (91) et les problèmes inverses (89, 99) se rencontrent dans la demeure de l'opérateur de Dirac (70).

Pourtant, même quand une route les relie, chaîne de montagnes et réseau hydrographique restent différents. La distance à partir de la métrique et la distance à partir du spectre coïncident mais sont des racines distinctes, et les problèmes inverses

de diffusion, de valeur au bord et spectral sont des mathématiques différentes. Et même le rigoureux modèle standard de la GNC a touché à l'ajustement après une prédiction manquée — sur le pont aussi, la mise en garde d'Eddington (101) reste vivante. Ce qu'a fait cet article, c'est greffer correctement les deux lignées en un point (le spectre) et, à cette couture, séparer avec soin les racines distinctes. Séparer ce que l'écoute révèle de ce qu'elle ne révèle pas — à l'entrée de l'autoroute qui relie géométrie et problème inverse, la cent-deuxième adresse est rendue.

Registre des révisions

Deuxième édition (septembre 2026) : la forme a été alignée sur le modèle actuel (le positionnement et la portée sont réunis dans la note de portée juste après le résumé, et la section « Portée (ce qui est montré, et ce qui ne l'est pas) » est supprimée). Les références sont séparées en une entrée par article avec titre et DOI effectifs (une entrée sans DOI qui regroupait trois articles est supprimée), et les références externes sont données avec auteur, année, titre et revue. L'année de Chamseddine–Connes, « Why the Standard Model », est corrigée en 2008, année de la publication en revue. Milnor (1964), cité dans le texte, est ajouté aux références.

Références

1. Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press.
2. Connes, A. (2013). *On the spectral characterization of manifolds*. J. Noncommut. Geom.
3. Kac, M. (1966). *Can One Hear the Shape of a Drum?*. Amer. Math. Monthly.
4. Milnor, J. (1964). *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA.
5. Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*. Invent. Math.
6. Chamseddine, A. H., Connes, A. (2008). *Why the Standard Model*. J. Geom. Phys.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Article 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors 2 Is a Case of Distinct Roots* [Article 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Article 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Qubit as a Hopf Fibration* [Article 68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Dimension Census* [Article 69]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Home of the Constants* [Article 70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
13. Yamagishi, Y. (2026). *Zero-Tension and the Inverse Problem* [Article 89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
14. Yamagishi, Y. (2026). *Curvature Is Intrinsic* [Article 91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Shared Alphabet* [Article 92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486

16. Yamagishi, Y. (2026). *“Dimension” Is Not One Thing* [Article 94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
17. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle* [Article 96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671
18. Yamagishi, Y. (2026). *Reading the Interior from the Boundary* [Article 99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
19. Yamagishi, Y. (2026). *The Crossing of Royal Roads* [Article 100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
20. Yamagishi, Y. (2026). *Admiration and Caution* [Article 101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Sous licence Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)