

Udire la forma dallo spettro

— La geometria non commutativa di Connes, il problema spettrale inverso di Kac, e l’autostrada che collega geometria e problemi inversi — [Articolo 102]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026 (Seconda edizione)

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

Due lignaggi attraversano il corpus — il **corso principale geometrico** (Riemann $\rightarrow \dots \rightarrow$ Hopf, articolo 91) e il **cervello integrale / problema inverso** (leggere la causa dall’effetto, articoli 89 e 99). Questo articolo **li collega, per la prima volta, con un’unica strada**. La chiave è la domanda «**si può udire la forma dallo spettro (le vibrazioni proprie)?**» La celebre domanda di Mark Kac «**Si può udire la forma di un tamburo?**» (1966) — l’insieme degli autovalori del laplaciano (lo spettro) può restituire la forma (la geometria) del tamburo? — è esattamente un **problema inverso**. La risposta è **in generale «no»** (esistono forme **isospettrali non isometriche**: forme diverse con lo stesso spettro = nessuna unicità). Intanto la **geometria non commutativa** di Alain Connes riscrive la geometria nello spettro dell’**operatore di Dirac D** (una tripla spettrale $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$), e definisce perfino la distanza tra due punti come $d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1\}$ — **con il solo operatore**. Qui si applicano due discipline del corpus. **(1) Separazione delle radici distinte**: «la distanza dalla metrica» (Riemann, articolo 91) e «la distanza dallo spettro» (Connes) coincidono su una varietà riemanniana, **ma sono radici distinte** con punti di partenza diversi. E la **famiglia dei problemi inversi** — scattering (GLM, articolo 89) / valore al bordo (Calderón, articolo 99) / spettrale (Kac, questo articolo) — condivide la postura ma è **matematica diversa = radici distinte**. **(2) Una sfumatura onesta**: il modello standard non commutativo di Connes–Chamseddine predispose una massa dell’Higgs che fu esclusa, e fu poi aggiustato aggiungendo a posteriori un campo — **perfino un programma rigoroso sfiora il precipizio dell’articolo 101 (l’ammonimento di Eddington)**. La chiave di volta del ponte è l’**articolo 70 (il teorema dell’indice = la dimora dell’operatore di Dirac)**, dove la geometria (91) e i problemi inversi (99) si incontrano sullo spettro di D .

Portata (scope note): Questo articolo è un'interpretazione strutturale (strato 2) di matematica consolidata (la geometria non commutativa di Connes, le triple spettrali, il problema spettrale inverso di Kac, la legge di Weyl e il nucleo del calore). Non contiene nuova matematica né nuove previsioni. La GNC è una teoria pesante; resta quindi **un'introduzione strutturale, e non si dice che il modello standard sia stato derivato**. Che due lignaggi siano collegati da una strada non significa che siano identici. «OS dell'Universo» è una lente non scientifica dello strato 3, non un'affermazione di meccanismo. Relazione con gli articoli precedenti: la mappa del corpus proviene dall'articolo 100, il corso principale geometrico dall'articolo 91, la postura del problema inverso dagli articoli 89 e 99, il teorema dell'indice e l'operatore di Dirac dall'articolo 70, le istanze distinte della dimensione dagli articoli 69 e 94, la disciplina delle radici distinte dagli articoli 48 e 58, l'ammonimento di Eddington dall'articolo 101, e il principio di gauge dall'articolo 96. **Ciò che questo articolo aggiunge** è collegare i due lignaggi del corpus — il **corso principale geometrico** e i **problemi inversi** — nell'unico punto «udire la forma dallo spettro», e, su quella cucitura, **ordinare le radici distinte (distanza dalla metrica / distanza dallo spettro; la famiglia dei problemi inversi = scattering, valore al bordo, spettrale)**.

1. Introduzione: collegare due lignaggi con un'unica strada, per la prima volta

La mappa del corpus (articolo 100) mostra due grandi lignaggi. Uno è il **corso principale geometrico** — dalla curvatura intrinseca di Riemann (articolo 91) alle forme di Cartan (92) e alla fibrazione di Hopf (67, 68). L'altro è il **cervello integrale / problema inverso** — dalla postura Zero-Tension (89) al problema al contorno di Calderón (99). Finora erano catene montuose e sistemi fluviali separati. Questo articolo **li collega con un'unica autostrada**.

Il nome di questa strada è «**si può udire la forma dallo spettro?**» Leggere la geometria di un oggetto (la forma, la curvatura, la dimensione) dalle sue vibrazioni proprie (lo spettro) è un **problema inverso** (recuperare la causa = la geometria dall'effetto = lo spettro) e, al tempo stesso, una **pura questione di geometria**. I due lignaggi si incontrano qui. Questo articolo non costruisce alcun nuovo teorema. Fa visita a due maestri — Mark Kac e Alain Connes — e innesta l'uno sull'altro i due lignaggi del corpus, con la corretta separazione delle radici distinte.

2. La geometria non commutativa di Connes: scrivere la geometria nello spettro di un operatore

Fatto standard 2.1 (La tripla spettrale e la formula della distanza)

La **geometria non commutativa (GNC)** di Alain Connes rappresenta uno spazio non come un «insieme di punti» ma come una **trippla spettrale** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$: un'algebra di funzioni $\mathcal{A}$, uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, e l'**operatore di Dirac** D (che porta l'informazione geometrica — metrica, dimensione, curvatura). Notevolmente, perfino la **distanza** tra due punti si può scrivere con il solo D :

$$d(x, y) = \sup_{f \in \mathcal{A}} \{ |f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1 \}.$$

Inoltre il **teorema di ricostruzione di Connes** garantisce che una tripla spettrale commutativa che soddisfa gli assiomi è un'**ordinaria varietà riemanniana**. Cioè, la geometria può essere interamente riscritta nello **spettro** di D .

Questo è un rovesciamento del punto di vista. Di solito la geometria comincia con «ci sono punti, e tra i punti c'è una distanza». Connes invece mette **al primo posto gli autovalori (lo spettro) dell'operatore D , e ne legge distanza, dimensione e curvatura**. Proprio perché la geometria si può dire senza punti, essa si estende al mondo quantistico e non commutativo in cui la nozione di punto viene meno (quando $\mathcal{A}$ è non commutativa) — da qui il nome «geometria non commutativa».

3. «Si può udire la forma di un tamburo?» di Kac: si può udire la forma dallo spettro?

Fatto standard 3.1 (Il problema spettrale inverso)

Nel 1966 Mark Kac chiese: «**Si può udire la forma di un tamburo?**» Si può recuperare in modo univoco la forma (la geometria) di un tamburo dal suo suono — l'**insieme degli autovalori (lo spettro)** del laplaciano della membrana? Questo è il **problema spettrale inverso** (spettro $\rightarrow$ geometria). La risposta è **in generale «no»**: Milnor (1964, tori di dimensione 16) e Gordon–Webb–Wolpert (1992, tamburi piani) costruirono figure **isospettrali non isometriche** — forme diverse con lo stesso spettro. Lo spettro **non** determina la forma in modo univoco.

Questa è la spina dorsale dell'articolo. «Udire la forma dallo spettro» è un **problema inverso**, e per di più un problema **senza unicità** — la controparte dal volto diverso del problema di Calderón (articolo 99), che era «unico ma gravemente mal

posto». I problemi inversi sono di vari tipi: alcuni unici ma instabili (Calderón), altri nemmeno unici (Kac). «Udire» non significa «conoscere» — il confine tra ciò che si può udire e ciò che non si può va tracciato con esattezza.

4. Che cosa si ode, e che cosa no

Osservazione 4.1 (Ciò che lo spettro determina = ciò che è udibile)

Anche se la forma non è udibile in modo univoco, **molte grandezze lo sono di certo**. Dallo sviluppo per tempi brevi del nucleo del calore $\text{Tr } e^{-t\Delta} \sim (4\pi t)^{-d/2} \left(\text{vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M R + \dots \right)$, lo spettro determina:

- la **dimensione** d (l'esponente nella legge di Weyl $N(\lambda) \sim C_d \text{vol}(M) \lambda^{d/2}$),
- il **volume** $\text{vol}(M)$ (lo stesso coefficiente),
- la **curvatura scalare totale** $\int_M R$ (il termine successivo).

Dunque **dimensione, volume e curvatura totale sono «udibili»**, mentre i dettagli fini della forma (se due forme siano isometriche) sono in generale «non udibili».

Che **la dimensione sia udibile dallo spettro** è particolarmente suggestivo per il corpus. La «dimensione» vista nell'articolo 69 (perché 3+1) e nell'articolo 94 (la dimensione non è un solo concetto) compare qui come **un'ulteriore istanza distinta** — **la dimensione come invariante spettrale** (torna a valere il «una parola, radici distinte» degli articoli 58 e 94).

Dimensione topologica, dimensione frattale e ora **dimensione spettrale** sono volti distinti che condividono una parola.

5. Separazione delle radici distinte: le due radici della distanza, e la famiglia dei problemi inversi

Osservazione 5.1 (Stessa parola «distanza / geometria», radici distinte)

Questo articolo separa due volte radici distinte.

(a) **Le due radici della distanza: «la distanza dalla metrica»** (Riemann, articolo 91 = integrare il tensore metrico g per la distanza geodetica) e **«la distanza dallo spettro»** (Connes = misurata tramite il commutatore con D). Su una varietà riemanniana le due **coincidono**, ma sono **radici distinte con punti di partenza diversi (metrica contro spettro di un operatore)**. La coincidenza non è una «prova della stessa radice», ma una «buona traduzione».

(b) **La famiglia dei problemi inversi: scattering** (GLM, articolo 89, dati di scattering $\rightarrow$ potenziale) / **valore al bordo** (Calderón, articolo 99, mappa DtN $\rightarrow$ conduttività, unico ma mal posto) / **spettrale** (Kac, questo articolo, spettro $\rightarrow$ geometria, senza unicità). I tre condividono la postura «leggere la causa dall'effetto», ma differiscono nelle equazioni e nel carattere dell'unicità — **matematica diversa = radici distinte** (articoli 48 e 58).

Questa separazione è il punto. La tentazione di dissolvere tutto — «geometria, spettro e problemi inversi alla fine sono tutti la stessa cosa» — viene fermata qui. Che **due lignaggi siano collegati da una strada** è altro dal loro **essere identici**. Anche quando una strada li collega, la catena montuosa e il sistema fluviale sono terreni diversi.

6. Una sfumatura onesta: il modello standard non commutativo e l'Higgs a posteriori

Per equità, si registra anche il **limite** della GNC. Connes e Chamseddine derivarono la lagrangiana del modello standard **come geometria** da una **geometria quasi commutativa** (lo spaziotempo per uno spazio non commutativo finito) — un risultato importante. Ma il modello **prediceva inizialmente una massa dell'Higgs di circa 170 GeV**, che fu esclusa dall'esperimento (Tevatron, 2008). Per renderlo coerente con il valore osservato di circa 125 GeV, **fu introdotto in seguito un campo scalare aggiuntivo**.

Qui risuona l'articolo 101 (l'ammonimento di Eddington). **Perfino un programma rigoroso e fondato su principi sfiora la situazione di aggiungere a posteriori un elemento per adattarsi ai dati**. Per equità, l'aggiustamento della GNC differisce per natura dai ritocchi numerici di Eddington — ciò che è stato aggiunto è un meccanismo fisico (un campo), non una cifra a posteriori. Tuttavia, che **«l'aggiustamento dopo una previsione mancata tocchi il confine tra derivazione e selezione»** è un punto che il corpus tiene presente. La GNC è un bel ponte, ma anche su quel ponte il corpus mantiene le sue etichette (strato 2 / radici distinte / firma $\neq$ prova).

7. Collegamento con il corpus

Questo articolo **annoda più fili in un punto**. (a) **La dimora del teorema dell'indice (articolo 70)** = la chiave di volta del **ponte**: il teorema dell'indice di Atiyah–Singer vive **sull'operatore di Dirac D** , e la GNC **costruisce** la geometria a partire da quello stesso D . L'articolo 70 è dunque la **confluenza** in cui il corso principale geometrico e i problemi inversi si incontrano. (b) **Problemi inversi (articoli 89 e 99)**: il problema spettrale inverso di Kac entra nella famiglia dei problemi inversi del corpus come **terzo membro** (scattering, valore al bordo, spettrale = radici distinte). (c) **Curvatura (articolo 91)**: la curvatura scalare totale $\int R$ è udibile dal nucleo del calore — la curvatura intrinseca di Riemann è impressa anche nello spettro (un ritrovarsi su un'altra radice). (d) **Dimensione (articoli 69 e 94)**: la dimensione spettrale è una nuova istanza distinta della «dimensione». (e) **Il modello standard (articolo 96)**: leggendo i campi di gauge come geometria, la GNC è parente della versione non commutativa del principio di gauge di Weyl (96) — ma è un altro quadro, una radice distinta.

Riflessione personale (strato 3; etichettata come non scientifica / nessuna affermazione di meccanismo)

Nella lente (metafora) del corpus, l'OS dell'Universo appare non come un palcoscenico fatto di punti ma come **un unico accordo suonato da innumerevoli vibrazioni proprie (uno spettro)** — la forma sorge dal suono, e noi recuperiamo la geometria del mondo «udendo». Un'eco lontana dell'«it from bit» di Wheeler e del «tutto è numero (armonia)» di Pitagora. Ma **questo porta l'etichetta non scientifica**. «Il mondo = un accordo» è una metafora che sostiene l'intuizione, non un meccanismo né una previsione. **Ciò che qui è certo è il punto matematico per cui leggere la geometria dallo spettro è un problema inverso, e non è determinato in modo univoco**. E vale la pena tenerlo presente — nel momento in cui si crede che l'udire riveli perfino i dettagli fini della forma, si cade sul controesempio di Kac (isospettrale non isometrico) e giù dal precipizio di Eddington (101). Separare con esattezza ciò che l'udire rivela da ciò che non rivela. È proprio sul ponte che collega due lignaggi che si mettono le etichette con più cura. Alla geometria e al problema inverso, ai due maestri Connes e Kac, si registra un quieto rispetto.

8. Conclusione

«Si può udire la forma dallo spettro?» — questa sola domanda ha collegato per la prima volta con un'unica strada i due lignaggi del corpus. La geometria non commutativa di Connes riscrive la geometria nello spettro di un operatore, e il problema spettrale inverso di Kac la riprende come «problema inverso». La risposta non è unica (isospettrale non isometrico). Udibili sono la dimensione, il volume e la curvatura totale; non udibili i dettagli fini della forma. Il corso principale geometrico (91) e i problemi inversi (89, 99) si incontrano nella dimora dell'operatore di Dirac (70).

Eppure, anche quando una strada li collega, catena montuosa e sistema fluviale restano diversi. La distanza dalla metrica e la distanza dallo spettro coincidono ma sono radici distinte, e i problemi inversi di scattering, di valore al bordo e spettrale sono matematica diversa. E perfino il rigoroso modello standard della GNC ha toccato l'aggiustamento dopo una previsione mancata — anche sul ponte l'ammonimento di Eddington (101) resta vivo. Ciò che questo articolo ha fatto è innestare

correttamente i due lignaggi in un punto (lo spettro) e, su quella cucitura, separare con cura le radici distinte. Separare ciò che l'udire rivela da ciò che non rivela — all'ingresso dell'autostrada che collega geometria e problema inverso, il centoduesimo indirizzo viene restituito.

Registro delle revisioni

Seconda edizione (settembre 2026): la forma è stata allineata al modello attuale (collocazione e portata sono raccolte nella nota di portata subito dopo il sommario, ed è stata tolta la sezione «Portata (che cosa si mostra e che cosa no)»). I riferimenti sono divisi in una voce per articolo con titolo e DOI effettivi (è stata tolta una voce senza DOI che raggruppava tre articoli), e i riferimenti esterni sono dati con autore, anno, titolo e rivista. L'anno di Chamseddine–Connes, «Why the Standard Model», è corretto in 2008, anno della pubblicazione in rivista. Milnor (1964), citato nel testo, è stato aggiunto ai riferimenti.

Bibliografia

1. Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press.
2. Connes, A. (2013). *On the spectral characterization of manifolds*. J. Noncommut. Geom.
3. Kac, M. (1966). *Can One Hear the Shape of a Drum?*. Amer. Math. Monthly.
4. Milnor, J. (1964). *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA.
5. Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*. Invent. Math.
6. Chamseddine, A. H., Connes, A. (2008). *Why the Standard Model*. J. Geom. Phys.
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Articolo 48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Agreement of the Factors 2 Is a Case of Distinct Roots* [Articolo 58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Articolo 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Qubit as a Hopf Fibration* [Articolo 68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Dimension Census* [Articolo 69]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Home of the Constants* [Articolo 70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
13. Yamagishi, Y. (2026). *Zero-Tension and the Inverse Problem* [Articolo 89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
14. Yamagishi, Y. (2026). *Curvature Is Intrinsic* [Articolo 91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Shared Alphabet* [Articolo 92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
16. Yamagishi, Y. (2026). *"Dimension" Is Not One Thing* [Articolo 94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
17. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle* [Articolo 96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671

18. Yamagishi, Y. (2026). *Reading the Interior from the Boundary* [Articolo 99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
19. Yamagishi, Y. (2026). *The Crossing of Royal Roads* [Articolo 100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
20. Yamagishi, Y. (2026). *Admiration and Caution* [Articolo 101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Concesso in licenza Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)