

スペクトルから形を聴く

— コンヌの非可換幾何・カッツの逆スペクトル問題と、幾何と逆問題をつなぐ高速道路 — [論文
102]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— *From thinking to syncing.* —

要旨

体系には二つの系譜が流れている——幾何学的本流（リーマン→...→ホップ・論文91）と、積分脳＝逆問題（結果から原因を読む・論文89・99）。本稿は、この二つを初めて一本の道で直結する。鍵は「形は、スペクトル（固有振動）から聴けるか」という問いだ。マーク・カッツの有名な問い「太鼓の形は聞こえるか」（1966）——ラブラシアン固有値の集まり（スペクトル）から、太鼓の形（幾何）を復元できるか——は、まさに逆問題である。答えは一般には「否」（形が違うのに同じスペクトルをもつ“同スペクトル異形”が存在する＝非一意）。一方アラン・コンヌの非可換幾何は、幾何をディラック作用素 D のスペクトルに書き直し（スペクトル三つ組 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ ）、二点間の距離すら $d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1\}$ と作用素だけで定義する。ここで体系の規律が二つ効く。(1) 別根の峻別：「計量から測る距離」（リーマン・論文91）と「スペクトルから測る距離」（コンヌ）は、リーマン多様体上で一致しても、出発点の違う別の根である。そして逆問題の族——散乱（GLM・論文89）／境界値（カルデロン・論文99）／スペクトル（カッツ・本稿）——は、構えは同じでも別の数学＝別根だ。(2) 正直なニュアンス：コンヌ＝シャンセディンの非可換幾何版・標準模型はヒッグス質量を予言したが外れ、後から場を足して調整した——厳密なプログラムですら、論文101（エディントンの戒め）の崖に触れる。橋の要は論文70（指数定理＝ディラック作用素の実家）で、幾何（91）と逆問題（99）が D のスペクトルで出会う。

本稿の射程 (scope note) : 本稿は確立された数学 (コンヌの非可換幾何、スペクトル三つ組、カッツの逆スペクトル問題、Weyl則・熱核) の構造的解釈 (第2層) である。新しい数学も新しい予言も含まない。非可換幾何は重い理論なので構造的な紹介に留め、標準模型を導いたとは言わない。二系譜が一本の道でつながることは、それらが同一であることを意味しない。「宇宙OS」は第3層の非科学レンズであり、機構の主張ではない。既刊との関係: 体系の地図は論文100、幾何の本流は論文91、逆問題の構えは論文89・99、指数定理とディラック作用素は論文70、次元の別インスタンスは論文69・94、別根の規律は論文48・58、エディントンの戒めは論文101、ゲージ原理は論文96から受け取る。本稿が加えたのは、体系の幾何本流と逆問題の二系譜を「スペクトルから形を聴く」という一点で直結し、その接合面で別根 (計量からの距離 / スペクトルからの距離、逆問題の族 = 散乱・境界値・スペクトル) を仕分けたことである。

1. 序: 二つの系譜を、初めて一本の道で結ぶ

体系の地図 (論文100) には、二つの大きな系譜が描かれている。一つは幾何学的本流——リーマンの内在曲率 (論文91) から、カルタンの形式 (92)、ホップの繊維 (67・68) へ。もう一つは積分脳 = 逆問題——ゼロテンションの構え (89) から、カルデロンの境界値問題 (99) へ。これまで、この二つは別々の山脈と水系だった。本稿は、両者を一本の高速道路で直結する。

その道の名は、「形は、スペクトルから聴けるか」。物の固有振動 (スペクトル) から、その物の幾何 (形・曲率・次元) を読み取れるか——これは逆問題 (結果 = スペクトルから、原因 = 幾何を復元する) であり、同時に純粋な幾何の問いでもある。二つの系譜は、ここで出会う。新しい定理は作らない。二人の巨匠——マーク・カッツとアラン・コンヌ——を訪ね、体系の二系譜を正しい別根の線引きとともに接ぐ。

2. コンヌの非可換幾何: 幾何を作用素のスペクトルに書く

標準的事実 2.1 (スペクトル三つ組と距離の公式)

アラン・コンヌの非可換幾何 (NCG) は、空間を「点の集合」ではなくスペクトル三つ組 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ で表す: 関数の代数 $\mathcal{A}$ 、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 、そしてディラック作用素 D (幾何の情報 = 計量・次元・曲率を担う)。驚くべきは、二点間の距離すら、 D だけで書けることだ:

$$d(x, y) = \sup_{f \in \mathcal{A}} |f(x) - f(y)| : \|[D, f]\| \leq 1.$$

さらにコンヌの再構成定理は、可換なスペクトル三つ組が公理を満たせば、それはふつうのリーマン多様体そのものだと保証する。すなわち幾何は、 D のスペクトルに完全に書き直せる。

これは発想の転換だ。ふつう幾何は「点があって、点の間に距離がある」と始まる。コンヌは逆に、作用素 D の固有値（スペクトル）を先に置き、そこから距離・次元・曲率を“読み出す”。点を使わずに幾何を語れるからこそ、点の概念が壊れる量子的・非可換な世界（ $\mathcal{A}$ が可換でない場合）へも幾何を拡張できる——これが「非可換幾何」の名の由来である。

3. カッツ「太鼓の形は聞こえるか」：スペクトルから形は聴けるか

標準的事実 3.1（逆スペクトル問題）

マーク・カッツは1966年、「太鼓の形は聞こえるか（Can one hear the shape of a drum?）」と問うた。太鼓の音＝膜のラプラシアン固有値の集まり（スペクトル）から、太鼓の形（幾何）を一意に復元できるか。これは逆スペクトル問題（スペクトル→幾何）である。答えは一般には「否」：ミルナー（1964・16次元トーラス）やゴードン＝ウェッブ＝ウォルパート（1992・平面の太鼓）が、形が違っても同じスペクトルをもつ図形（同スペクトル異形 **isospectral non-isometric**）を構成した。スペクトルは形を一意には決めない。

ここが本稿の背骨だ。「スペクトルから形を聴く」ことは逆問題であり、しかも非一意——これは、カルデロン問題（論文99）が「一意だが激しく悪条件」だったのと対をなす別の顔である。逆問題には、一意でも不安定なもの（カルデロン）と、そもそも一意でないもの（カッツ）がある。「聴けば分かる」わけではない——聴いて分かることと、分からないことの境界を、正確に引く。

4. 何が聞こえて、何が聞こえないか

観察 4.1（スペクトルが決めるもの＝聞こえるもの）

形は一意に聞こえなくても、多くの量は確かに聞こえる。熱核の短時間展開 $\text{Tr } e^{-t\Delta} \sim (4\pi t)^{-d/2} (\text{vol}(M) + \frac{t}{6} \int_M R + \dots)$ から、スペクトルは次を決める：

- 次元 d (Weyl則 $N(\lambda) \sim C_d \text{vol}(M) \lambda^{d/2}$ の指数)
- 体積 $\text{vol}(M)$ (同じ係数)
- 全スカラー曲率 $\int_M R$ (次の項)

つまり次元・体積・全曲率は“聞こえる”が、形の細部（等長かどうか）は一般に“聞こえない”。

とりわけ次元がスペクトルから聞こえることは、体系にとって示唆的だ。論文69（なぜ3+1次元か）・論文94（次元は一つ概念ではない）で見た「次元」が、ここではスペクトル不変量としての次元というもう一つの別インスタンスとして現れる（論文58・94の“一語・複数の別根”がまた効く）。位相次元・フラクタル次元・そしてスペクトル次元は、語を共有する別の顔だ。

5. 別根の峻別：距離の二つの根と、逆問題の族

観察 5.1（同じ「距離・幾何」、別の根）

本稿は二重に別根を分ける。

(a) 距離の二つの根：「計量から測る距離」（リーマン・論文91＝計量テンソル g を積分して測地線距離）と、「スペクトルから測る距離」（コンヌ＝ D の交換子で測る）。リーマン多様体上では両者は一致するが、出発点（計量 vs 作用素スペクトル）が違う別の根である。一致は“同根の証明”ではなく、“よい翻訳”だ。

(b) 逆問題の族：散乱の逆問題（GLM・論文89・散乱データ→ポテンシャル）／境界値の逆問題（カルデロン・論文99・DtN写像→伝導率・一意だが悪条件）／スペクトルの逆問題（カッツ・本稿・スペクトル→幾何・非一意）。三つは「結果から原因を読む」構えを共有するが、方程式も一意性の様相も違う別の数学＝別根（論文48・58）。

この峻別が要点だ。「幾何もスペクトルも逆問題も、結局ぜんぶ同じ一つのことだ」と溶かしたくなる誘惑を、体系はここで止める。二系譜が一本の道でつながることと、それらが同一であることは、別だ。道が通じて、山脈と水系は別の地形である。

6. 正直なニュアンス：非可換幾何版・標準模型と、ヒッグスの後知恵

公平のために、NCGの限界も記す。コンヌとシャンセディンは、時空に有限な非可換空間を掛けた「概可換幾何」から、標準模型のラグランジアンを幾何として導いた——大きな成果だ。だがそのモデルは当初、ヒッグス粒子の質量を約170 GeV と予言し、これは2008年に実験（テバトロン）で排除された。後に、実際に観測された約125 GeV と整合させるため、新しいスカラー場を一つ加えて調整された。

ここで論文101（エディントンの戒め）が呼応する。厳密で原理的なプログラムですら、データに合わせて後から要素を足す局面に触れる。ただし公平に言えば、NCGの調整はエディントンの数合わせとは質が違う——加えたのは物理的機構（場）であって、数字の後知恵ではない。それでも、「予言が外れたあとの調整」は、導出と選択の境界に触れるという一点は、体系が覚えておく一点である。NCGは美しい橋だが、その橋の上でも札（第2層／別根／署名 ≠ 証明）を貼りつづける。

7. 体系への接続

本稿は、体系のいくつもの糸を一点で束ねる。(a) 指数定理の実家 (論文70) = 橋の要石：アティヤ＝シンガーの指数定理はディラック作用素 D の上に住み、NCGはその D から幾何を作る。だから70は、幾何本流と逆問題が会合する合流点である。(b) 逆問題 (論文89・99)：カツの逆スペクトル問題は、体系の逆問題の族に三人目として加わる (散乱・境界値・スペクトル＝別根)。(c) 曲率 (論文91)：全スカラー曲率 $\int R$ が熱核から聞こえる＝リーマンの内在曲率がスペクトルにも刻まれる (別の根での再会)。(d) 次元 (論文69・94)：スペクトル次元は「次元」の新たな別インスタンス。(e) 標準模型 (論文96)：ゲージ場を幾何として読むNCGは、ワイルのゲージ原理 (96) の非可換幾何版の親戚 (ただし別の枠組み・別根)。

■ 著者の私感 (第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない)

体系のレンズ (比喩) では、宇宙OSは点でできた舞台ではなく、無数の固有振動 (スペクトル) が奏でる一つの和音のように感じられる——形は音から立ち上がり、私たちは「聴いて」世界の幾何を復元している、と。ホーラーの “it from bit”、ピタゴラスの「万物は数 (調和)」の、遠いこだま。だがこれは非科学の札つきだ。「世界＝和音」は直観を運ぶ比喩であって、機構でも予言でもない。ここで確かなのは、スペクトルから幾何を読むのは逆問題であり、一意には決まらない、という数学の一点である。そして覚えておきたい——聴けば形の細部まで分かる、と思った瞬間に、人はカツの反例 (同スペクトル異形) とエディントンの崖 (101) に落ちる。聴いて分かることと、分からないことを、正確に分ける。二つの系譜をつなぐ橋の上でこそ、いちばん慎重に札を貼る。幾何と逆問題、二人の巨匠コンヌとカツに、静かな敬意を記す。

8. 結論

「形は、スペクトルから聴けるか」——この一問が、体系の二つの系譜を初めて一本の道でつないだ。コンヌの非可換幾何は幾何を作用素のスペクトルに書き直し、カツの逆スペクトル問題はそれを「逆問題」として引き受ける。そして答えは、一意ではない (同スペクトル異形)。聞こえるのは次元・体積・全曲率、聞こえないのは形の細部。幾何本流 (91) と逆問題 (89・99) は、ディラック作用素の実家 (70) で会合する。

だが道が通じても、山脈と水系は別だ。計量からの距離とスペクトルからの距離は一致しても別根であり、散乱・境界値・スペクトルの逆問題も別の数学である。そして、厳密なNCGの標準模型ですら、予言が外れたあと調整に触れた——橋の上でも、エディントンの戒め (101) は生きている。本稿がしたのは、二系譜を一点 (スペクトル) で正しく接ぎ、その接合面で別根を丁寧に分けたことである。聴いて分かることと分からないことを分ける——幾何と逆問題を結ぶ高速道路の入口に、102番目の番地を返す。

改訂記録

第2版（2026年9月）：書式を現行の型に揃えた（位置づけと射程を要旨の直後の射程注記にまとめ、「射程（何を示し、何を示さないか）」の節を外した）。参考文献を一編ずつの項目に分けて実際の題名と DOI を付け（DOI の無い、三編をまとめた項目を外した）、外部文献を著者・年・題目・誌名までに揃えた。Chamseddine–Connes の「Why the Standard Model」の年を、誌に載った 2008 年に直した。本文が引く Milnor (1964) を参考文献に加えた。

参考文献

1. Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press.
2. Connes, A. (2013). *On the spectral characterization of manifolds*. J. Noncommut. Geom.
3. Kac, M. (1966). *Can One Hear the Shape of a Drum?*. Amer. Math. Monthly.
4. Milnor, J. (1964). *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA.
5. Gordon, C., Webb, D., Wolpert, S. (1992). *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*. Invent. Math.
6. Chamseddine, A. H., Connes, A. (2008). *Why the Standard Model*. J. Geom. Phys.
7. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
8. 山岸勇輝 (2026). 因子 2 の一致は「別根」である [論文58]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
9. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
10. 山岸勇輝 (2026). *Hopf* 束としての量子ビット [論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
11. 山岸勇輝 (2026). 次元センサス [論文69]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011
12. 山岸勇輝 (2026). 定数の実家 [論文70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
13. 山岸勇輝 (2026). ゼロテンションと逆問題 [論文89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
14. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
15. 山岸勇輝 (2026). 共通のアルファベット [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
16. 山岸勇輝 (2026). 「次元」は一つではない [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
17. 山岸勇輝 (2026). ゲージという原理 [論文96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671
18. 山岸勇輝 (2026). 境界から内部を読む [論文99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
19. 山岸勇輝 (2026). 王道の交差 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
20. 山岸勇輝 (2026). 憧れと戒め [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)