連分数の統計は、超越と分かっている数と、分かっていない数と、三次の代数的数を見分けない

— 部分商の幾何平均・分母の伸び・1 の割合は、名前のある八つの数でみな乱数の散らばりの中にあり、外れるのは周期を持つ二次の数と形の決まった e だけである — 分離子は、測度で言う「ほとんどすべて」か、名前で指す「この数」か — [論文1021]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

π＋e や πe や γ が超越数かどうかは分かっていない。一方、ほとんどすべての実数では、連分数の部分商の幾何平均がヒンチンの定数に近づくことが知られている（ヒンチン）。本稿は、超越と分かっている数・分かっていない数・三次の代数的数の連分数を 3000 項ずつ展開し、同じ統計で並べる。新しい定理も法則も主張せず、どの数が超越かも証明しない。 第一に、これが本稿の芯である。名前のある八つの数は、乱数の散らばりの中で見分けがつかない——部分商の幾何平均は、超越と分かっている π・e の π 乗・ln 2・ln π で 2.667237・2.699672・2.659773・2.623448、分かっていない π＋e・πe・γ で 2.600972・2.677830・2.684892、代数的な 2 の三乗根で 2.630640 だった。乱数の数 100 個は平均 2.680329・標準偏差 0.055238 で、八つの位置は標準偏差の 1.436645 倍以内に収まった（第2節・第3節）。 第二に、三つの統計はどれも同じ定数のまわりにある——ヒンチンの定数は 2.685452001、分母の伸びのレヴィの定数は 1.186569110、部分商が 1 になる割合は $\log_2(4/3)=0.415037499$ で、八つの数の値はそのまわりに散らばる（第2節）。 第三に、いちばん端の π＋e も、証拠にはならない——π＋e の幾何平均は乱数 100 個の中で下から 6 パーセントの位置（標準偏差の −1.436645 倍）で、1 の割合 0.437146 は乱数の最大 0.435478 をわずかに超えた。三つの量は一緒に動き（幾何平均と 1 の割合の相関 −0.750915）、八つを並べれば一つが端に来るのはふつうである（第3節）。 第四に、外れるのは、周期を持つ数と形の決まった数だけである——√2 の幾何平均は 2、黄金比は 1 で、e は 60 項で 2.592229、600 項で 5.325766 と増え続け、乱数の散らばりの上限を超える（第4節）。 第五に、三次の代数的数も「典型的な数」に見える——2 の三乗根は、周期を持つ二次の数と違い、幾何平均 2.630640（乱数の中で標準偏差の −0.899555 倍）で超越数と並ぶ（第3節）。 第六に、分離子は、測度で言う「ほとんどすべて」か、名前で指す「この数」か——ヒンチンの定理はほとんどすべての数について言い、どの数が例外かは言わない。名前のある数がどちらに入るかは、数値では決まらない（第5節）。 キーワード：連分数、ヒンチンの定数、レヴィの定数、ガウス＝クズミン、超越数、代数的数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ほとんどすべての実数で部分商の幾何平均がヒンチンの定数に近づくこと（ヒンチン）、分母の伸びのレヴィの定数、部分商の分布（ガウス＝クズミンの分布）、二次の無理数の連分数が周期的であること、e の連分数の形、π の超越性（リンデマン）、e の π 乗の超越性（ゲルフォント）、ln 2 と ln π の超越性、π＋e・πe・γ の超越性が未解決であること、ヒンチンの定数とその連分数についての計算（ベイリー、ボーウェイン、クランドール、1997）は、いずれも既知である。どの数が超越かを証明しない——3000 項の統計は、超越性についても、典型的かどうかについても何も証明しない。端の数を証拠と読まない——π＋e が端に来たことは、八つを並べたときの普通の揺れとして扱う。2 の三乗根の部分商が有界かどうかに入らない——これは未解決で、本稿は 3000 項を見ただけである。既刊との関係：論文811 の射程注記は、超越性に入らない、π や e が超越数であることは使わないと書いた——本稿はその席に座り、超越と分かっている数と分かっていない数を連分数の統計で並べる（先客なし）。論文812 は、近似のしやすさを決めるのが部分商の有界か非有界かであることを示した——ここでは、有界な周期を持つ数と増え続ける e だけが外れ、ほかは同じ散らばりに入ることを数える。論文176 は、「小さい」には測度で小さいことと範疇で小さいことの二つがあり、両立しないことを示した——ここでは、ヒンチンの定理が測度の意味の「ほとんどすべて」であり、名前のある数の一つ一つには何も言わないことを数える。論文804 は、測った高さだけでは e の分数を否定できないことを示した——ここでは、連分数の統計だけでは超越か代数的かを分けられないことを数える。加えたのは、名前のある八つの数を同じ統計で並べたこと、乱数 100 個の散らばりの中での位置を出したこと、端に来た π＋e を、量どうしの相関とともに扱ったこと、外れる数が周期と決まった形の数だけであることを示したことである。

1. 記法と問い

設定：実数 x の連分数 $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ の最初の 3000 項を、6000 桁の精度で展開した（4200 桁と 6000 桁で π の 3000 項が一致することを先に確かめた）。三つの統計を出す：部分商の幾何平均 $(a_1 \cdots a_n)^{1/n}$、近似分数の分母 q_n の伸び $\ln q_n / n$（レヴィの量）、部分商が 1 になる割合。

問い：超越と分かっている数と、分かっていない数と、代数的数は、連分数の統計で見分けられるか。

2. 名前のある八つの数

計算 2.1：ヒンチンの定数は 2.685452001、レヴィの定数 $\pi^2/(12\ln 2)$ は 1.186569110、部分商が 1 になる割合の極限 $\log_2(4/3)$ は 0.415037499 である。

数	分かっていること	幾何平均	レヴィの量	1 の割合
π	超越	2.667237	1.179480	0.419473
e^{π}	超越	2.699672	1.191249	0.409803
$\ln 2$	超越	2.659773	1.178361	0.424475
$\ln \pi$	超越	2.623448	1.165263	0.420473
$\pi + e$	未解決	2.600972	1.163295	0.437146
πe	未解決	2.677830	1.185244	0.408469
γ	未解決	2.684892	1.188063	0.420140
$2^{1/3}$	代数的（三次）	2.630640	1.170184	0.422808

最大の部分商は、π で 20776、e^{π} で 14440、$2^{1/3}$ で 12737 だった。

3. 乱数の散らばりとの比べ

計算 3.1：乱数の数 100 個を同じく 3000 項展開した。幾何平均は最小 2.513999・最大 2.794436、平均 2.680329・標準偏差 0.055238、レヴィの量は 1.133097 から 1.222640、1 の割合は 0.395132 から 0.435478 だった。八つの数の幾何平均の位置（標準偏差の倍）と、乱数でそれ以下になる割合は次のとおりである。

数	位置	それ以下の割合
π	-0.237021	0.43
e^{π}	$+0.350171$	0.59
$\ln 2$	-0.372139	0.36
$\pi + e$	-1.436645	0.06
πe	-0.045244	0.49
γ	$+0.082607$	0.51
$\ln \pi$	-1.029758	0.17
$2^{1/3}$	-0.899555	0.18

乱数での幾何平均と 1 の割合の相関係数は -0.750915 だった。$\pi + e$ の 1 の割合 0.437146 だけが乱数の最大 0.435478 をわずかに超えた。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。名前のある八つの数は、乱数の散らばりの中で見分けがつかない。超越と分かっている数も、分かっていない数も、三次の代数的数も、同じ幅の中に混ざって並ぶ——いちばん端の $\pi + e$ も、八つを並べれば一つが端に来る普通の揺れの範囲で、三つの量は一緒に動くので、外れは一つと数える。

4. 外れる数

計算 4.1：$\sqrt{2}$ は部分商が 1 のあと 2 ばかりで、60 項の幾何平均は 2.000000、黄金比は 1.000000 だった。e は 60 項で 2.592229、600 項で 5.325766 で、乱数の最大 2.794436 を超えて増え続けた。

> **観察 4.2**
>
> 外れるのは、周期を持つ数と形の決まった数だけである。二次の無理数は周期を持つので部分商が有界に並び、e は $1, 2k, 1$ の形で部分商が伸び続ける——どちらも、ほかの理由で形が分かっている数である。形の分からない数は、超越でも代数的でも、統計の上では同じに見える。

5. 分離子と、言わないこと

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、測度で言う「ほとんどすべて」か、名前で指す「この数」か。ヒンチンの定理は、例外が測度 0 であることを言うが、どの数が例外かは言わない——π や γ がヒンチンの定数に近づくことは示されておらず、極限がヒンチンの定数になる連分数は、ベイリーらがわざわざ作ってみせた形のものである。

> **観察 5.2**
>
> 言わないこと。どの数が超越かも、典型的かも証明しない。$\pi + e$ の端を証拠とは読まない——2 の三乗根の部分商が有界かどうかにも入らない。

6. 点呼と結び

1. 幾何平均 **2.667237**・**2.699672**・**2.659773**・**2.623448**・**2.600972**・**2.677830**・**2.684892**・**2.630640**（計算 2.1）：本稿の芯。
2. 乱数 100 個の平均 **2.680329**・標準偏差 **0.055238**、位置は **1.436645** 倍以内（計算 3.1）：見分けがつかない。
3. 定数 **2.685452001**・**1.186569110**・**0.415037499**（計算 2.1）：そのまわりに散らばる。
4. $\pi+e$ の 1 の割合 **0.437146**、乱数の最大 **0.435478**、相関 **−0.750915**（計算 3.1）：普通の揺れ。
5. e は **2.592229** から **5.325766**（計算 4.1）：形の決まった数は外れる。
6. 測度か名前か（観察 5.1）：分離子・論文811・812・176・804。

結び：連分数の統計は、超越と分かっている数と、分かっていない数と、三次の代数的数を見分けない。π・e の π 乗・ln 2・ln π、$\pi+e$・πe・γ、2 の三乗根の八つを 3000 項ずつ展開すると、部分商の幾何平均は 2.600972 から 2.699672 の間にあり、乱数 100 個の平均 2.680329・標準偏差 0.055238 に対して、位置は 1.436645 倍以内だった——端の $\pi+e$ も、三つの量が一緒に動く一つの揺れとして普通の範囲にある。外れるのは周期を持つ $\sqrt{2}$ と黄金比、形の決まった e（600 項で 5.325766）だけである。分離子は、測度で言う「ほとんどすべて」か、名前で指す「この数」かである。既刊との位置——論文812 は近似のしやすさを部分商の有界と非有界で分け、論文176 は「小さい」を測度と範疇に分け、論文804 は高さでは e の分数を否定できないことを示した。ここでは、論文811 が入らなかった超越性を、連分数の統計が見分けないことを数えた。正直に言えば——どの数が超越かについて、何一つ新しくは分かっていない。

参考文献

1. Bailey, D. H., Borwein, J. M., & Crandall, R. E. (1997). On the Khintchine constant. *Mathematics of Computation*.
2. Khinchin, A. Ya. (1964). *Continued Fractions*. University of Chicago Press.
3. 山岸勇輝 (2026). 『「小さい」は二つあって、両立しない』[論文176]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22097994
4. 山岸勇輝 (2026). 『油滴が e の半分を否定するのは半端な倍数が出ないからで、誤差が大きいと半端は雑音から現れる』[論文804]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22922340
5. 山岸勇輝 (2026). 『連分数の周期は、近似のしやすさではなく、二次方程式の根であることの印である』[論文811]. Zenodo.
6. 山岸勇輝 (2026). 『近似のしやすさを決めているのは、部分商が有界か非有界かである』[論文812]. Zenodo.

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)