球を混ぜた液の粘度の 2.5 は、粒子の体積ではなく粒子が外の流れに置く応力から出る

— 一様なひずみ流の中の球のストークス解で、球面での応力の面積分（ストレスレット）は 20π/3 に粘度と半径の三乗とひずみを掛けた値で、粒子の体積 4π/3 で割ると 2.5 になる。粘度と拡散を二つの未知数に当てると、係数が 1 から 2.5 に変わったときアボガドロ数は 1.581139 倍動く — 分離子は、粒子の中の体積で数えるか、粒子の外の応力で数えるか — [論文1024]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

小さな球を体積の割合 φ だけ混ぜた液の粘度は、希薄なら元の粘度の (1＋2.5φ) 倍になる。アインシュタインは 1906 年の学位論文でこの係数を 1 と書き、1911 年の訂正で 2.5 に直した。本稿は、一様なひずみ流の中の球のストークス解を記号計算で検算し、球面での応力の面積分から 2.5 を出し、その係数が粘度と拡散から決めるアボガドロ数にどう効くかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。2.5 は粒子の体積ではなく、粒子が外の流れに置く応力から出る——球面での応力の面積分（ストレスレット）を 400×800 の格子で数値積分すると、粘度と半径の三乗とひずみを 1 と置いて対角成分は 20.943978 で、閉じた式の 20π/3＝20.943951 と比 1.000001 で一致した。有効粘度の増分の係数はこれを粒子の体積 4π/3 で割った (10π/3)/(4π/3)＝2.500000 である（第3節）。 第二に、使った解は方程式と境界条件を満たす——記号計算で、連続の式は 0、ストークスの運動方程式の残差は三成分とも 0、球面上の点 (3/5, 4/5, 0)a で速度は 0 だった（第2節）。 第三に、粒子の影響は 1/r² で外へ届く——一様なひずみからの乱れに距離の二乗を掛けて遠方の極限を取ると、x 軸上の第一成分で −5a³/2 に収束する。粘度に効くのは、この外に届く応力である（第2節）。 第四に、係数はアボガドロ数に平方根で効く——粘度の増分はアボガドロ数と分子の半径の三乗の積を、拡散係数はその一乗の積を決めるので、二つを連立すると係数 k を 1 から 2.5 に替えたときアボガドロ数は √2.5＝1.581139 倍、半径は 1/√2.5 倍に動く（第4節）。 第五に、希薄な範囲では増分は割合に比例する——φ＝0.01・0.02・0.05 で粘度の比は 1.025000・1.050000・1.125000 である（第4節）。 第六に、分離子は、粒子の中の体積で数えるか、粒子の外の応力で数えるか——体積の割合だけなら係数は 1 で止まる。2.5 のうち体積を超える分は、球が外の流れを曲げて置く応力の分である（第5節）。 キーワード：アインシュタインの粘度の式、ストークス流、ストレスレット、懸濁液、アボガドロ数、有効粘度。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——希薄な懸濁液の粘度の式 (1＋2.5φ)（アインシュタイン 1906、訂正 1911）、一様なひずみ流の中の球のストークス解、ストレスレットによる有効応力の定義（バチェラー 1967）、ストークス＝アインシュタインの拡散係数は、いずれも既知である。希薄極限だけを見る——粒子どうしの流体力学的相互作用（φ² の項）、ブラウン運動、非ニュートン性、変形する粒子や球でない粒子は入れない。訂正の経緯に入らない——1906 年の係数 1 が 1911 年に 2.5 に直された理由には入らず、事実として引くだけである。実在の懸濁液と比べない——測定された粘度との一致は主張しない。数はすべて解の定義から計算した。散逸の道を使わない——2.5 は応力の面積分（有効応力の定義そのもの）から出し、散逸の増分から出す道は本稿では使わない。既刊との関係：論文673 は、コロイドが物質の名前ではなく大きさの窓の名前であることを、アインシュタイン＝ストークスの拡散係数を既知として示した——ここでは、同じ学位論文のもう一つの式、粘度の側の係数を数える。論文544 は、十三通りが同じアボガドロ数を返していたのに、いまその数が定義になっていることを示した——ここでは、その一通り（粘度と拡散）で係数の誤りがアボガドロ数を何倍動かすかを数える。論文827 は、ガラスの軟化点が粘度を一つ決めた規約であることを示した——ここでは、粘度の増分の係数が規約ではなく解から決まる数であることを数える。加えたのは、ストークス解を記号計算で検算したこと、ストレスレットを数値積分して 20π/3 と一致させたこと、係数がアボガドロ数に平方根で効くことを連立で出したことである。

1. 記法と問い

設定：粘度 μ の液の中に半径 a の固い球を置き、遠方で一様なひずみ流 $\mathbf{u} \to \mathbf{E}\cdot\mathbf{x}$（$\mathbf{E}$ は対称で跡が 0）を課す。ストークス解は

$$u_i = E_{ij}x_j\left(1-\frac{a^5}{r^5}\right) - \frac{5}{2}\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{x})\,x_i\left(\frac{a^3}{r^5}-\frac{a^5}{r^7}\right), \qquad p = -5\mu a^3\,\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}}{r^5}$$

である。球が外の流れに置く応力の面積分（ストレスレット）を $S_{ij} = \oint \frac{1}{2}(\sigma_{ik}n_k x_j + \sigma_{jk}n_k x_i)dS$ の跡なしの部分と定め、数密度 n の球を含む懸濁液の平均応力は $2\mu\mathbf{E} + n\mathbf{S}$ である。

問い：2.5 はどこから出るか。粒子の占める体積の割合 φ そのものなら係数は 1 で止まる。

2. 解の検算

計算 2.1：記号計算（sympy）で、連続の式 $\nabla\cdot\mathbf{u}$ は 0、運動方程式 $\mu\nabla^2\mathbf{u} - \nabla p$ の残差は三成分とも 0、球面上の点 $(3/5, 4/5, 0)a$ で $\mathbf{u}$ は 0 だった。一様なひずみからの乱れ $u_i - E_{ij}x_j$ に x^2 を掛けて x 軸上で遠方の極限を取ると、第一成分は $-5a^3/2$、残りは 0 である。

> **観察 2.2**
>
> 粒子の影響は 1/r² で外へ届く。固い球が流れを曲げる分は、粒子の中ではなく外の流れに、距離の二乗の逆数で残る——粘度に効くのは、この外に残る応力である。

3. ストレスレットと 2.5

計算 3.1：$\mu = a = 1$、$\mathbf{E} = \mathrm{diag}(1, -1/2, -1/2)$ と置き、球面を極角 400・方位角 800 の格子で刻んで応力の面積分を数値で出した。

成分	数値積分	閉じた式 $(20\pi/3)E_{ii}$
S_{11}	20.943978	20.943951
S_{22}	−10.471949	−10.471976
S_{33}	−10.472029	−10.471976

S_{11} を $(20\pi/3)E_{11}$ で割ると 1.000001 である。平均応力 $2\mu\mathbf{E} + n\mathbf{S}$ を $2\mu_{\mathrm{eff}}\mathbf{E}$ と読むと、$\mu_{\mathrm{eff}}/\mu = 1 + n(10\pi/3)a^3 = 1 + \frac{10\pi/3}{4\pi/3}\phi$ で、係数は $(10\pi/3)/(4\pi/3) = 2.500000$ である。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。2.5 は粒子の体積ではなく、粒子が外の流れに置く応力から出る。分子は $10\pi/3$、分母は球の体積 $4\pi/3$ で、比が $5/2$ である——体積の割合 φ だけを数えれば係数は 1 で、超える $3/2$ が外の応力の分である。

4. 係数はアボガドロ数に平方根で効く

計算 4.1：粘度の増分 $\mu^*/\mu - 1 = k\phi$ で、$\phi = N_A c \cdot \frac{4}{3}\pi a^3/M$ だから、$N_A a^3$ が決まる。拡散係数 $D = RT/(6\pi\mu N_A a)$ からは $N_A a$ が決まる。二つを連立すると a は $k^{-1/2}$ に、N_A は $k^{1/2}$ に比例する。仮の入力で連立を実際に解き、k を 1 から 2.5 に替えたときの N_A の比は 1.581139 で、$\sqrt{2.5} = 1.581139$ と 10^{-12} 以内で一致した。

計算 4.2：希薄な範囲の粘度の比は、$\phi = 0.01$・0.02・0.05 で 1.025000・1.050000・1.125000 である。

> **観察 4.3**
>
> 係数の誤りは、アボガドロ数に平方根で入る。二つの測定が二つの未知数を決めるので、一方の係数が **2.5** 倍違えば、答は **2.5** 倍ではなく $\sqrt{2.5}$ 倍動く——**1906** 年の係数 **1** から **1911** 年の **2.5** への訂正が、この道のアボガドロ数を動かした形である。

5. 分離子と、言わないこと

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、粒子の中の体積で数えるか、粒子の外の応力で数えるか。体積の割合だけなら係数は **1** で止まり、球が外の流れを曲げて置く応力を数えて初めて **2.5** になる——論文**673** が既知として使った拡散の側と、ここで数えた粘度の側は、同じ学位論文の二つの式である。

> **観察 5.2**
>
> 言わないこと。希薄極限だけを見て、粒子どうしの相互作用、ブラウン運動、非ニュートン性には入らない——**1906** 年の係数 **1** が **1911** 年に直された理由にも入らず、実在の懸濁液の測定とも比べない。

6. 点呼と結び

1. ストレスレット **20.943978**・$20\pi/3 = $ **20.943951**・比 **1.000001**・係数 **2.500000**（計算 3.1）：本稿の芯。
2. 連続の式 **0**・運動方程式 **0**・球面で **0**（計算 2.1）：解の検算。
3. 遠方の係数 $-5a^3/2$（計算 2.1）：影響は $1/r^2$ で外へ。
4. アボガドロ数の比 **1.581139** $= \sqrt{2.5}$（計算 4.1）：平方根で効く。
5. 粘度の比 **1.025000**・**1.050000**・**1.125000**（計算 4.2）：希薄な範囲。
6. 中の体積か、外の応力か（観察 5.1）：分離子・論文**673**・**544**・**827**。

結び：球を混ぜた液の粘度の **2.5** は、粒子の体積ではなく粒子が外の流れに置く応力から出る。一様なひずみ流の中の球のストークス解を記号計算で検算し、球面での応力の面積分を数値で出すと **20.943978** で、閉じた式の $20\pi/3 = 20.943951$ と比 **1.000001** で一致した。粒子の体積 $4\pi/3$ で割った係数は **2.500000** で、二つの測定を二つの未知数に当てると係数の **2.5** 倍はアボガドロ数の **1.581139** 倍として現れる——体積の割合だけなら **1** で止まり、超える分は外に $1/r^2$ で残る応力である。分離子は、粒子の中の体積で数えるか、粒子の外の応力で数

えるかである。既刊との位置——論文673 は拡散の側を既知として大きさの窓を数え、論文544 は十三通りの一致が定義に変わったことを、論文827 は粘度の値の規約を示した。ここでは、学位論文のもう一つの式の係数を、解の応力から数えた。正直に言えば——希薄極限の一つの球しか数えていない。

参考文献

1. Batchelor, G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
2. Einstein, A. (1906). Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. *Annalen der Physik*.
3. Einstein, A. (1911). Berichtigung zu meiner Arbeit: Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. *Annalen der Physik*.
4. 山岸勇輝 (2026). 『十三通りが同じ数を返していたのに、いまその数は定義になっている』[論文544]. Zenodo.
5. 山岸勇輝 (2026). 『「コロイド」は物質の名前ではなく、大きさの窓の名前である』[論文673]. Zenodo.
6. 山岸勇輝 (2026). 『ガラスの「軟化点」は物質の性質ではなく、粘度を一つ決めた規約である』[論文827]. Zenodo.

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)