

計量を宿す代数 — クリフォードの幾何学的代数・スピノルと、カルタンの外積代数を混同しないために — [論文104]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

系譜マップの源流には、まだ専用の道が通っていない席がある——ウィリアム・キングドン・クリフォード。彼は二つの遺産を残した。一つは幾何学的代数（クリフォード代数）：ベクトルの積を $uv = u \cdot v + u \wedge v$ （内積 + 外積）と定め、 $v^2 = Q(v)$ （ベクトルの二乗 = その長さ = 計量）とする代数だ。ここからスピノル——回転の"平方根"、 720° 回して初めて戻る対象——が生まれ、 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ （四元数）というホップ束の住処が現れる。もう一つは、アインシュタインより45年早い予言「物質とは空間の曲率のことだ」だ。本稿の芯は別根の峻別（論文58/92）にある：クリフォード代数（計量を"宿す"）と、カルタンの外積代数（論文92・計量を"忘れる"）は、同じ「幾何学的代数」に見えて、別の根である。外積代数は計量なしで形を書き（ストークス・トポロジー）、クリフォード代数は計量を組み込んでスピノルとディラック作用素を生む——ベクトル空間としては同型でも、代数としては別物だ。そしてクリフォードは、体系がすでに使うディラック作用素（指数定理＝論文70、コンヌ＝論文102）のアルファベットであり（ $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ ）、ホップの幾何（論文67）の代数的な実家でもある。スピノルの「2」は、体系の他の「2」（ボルン・ホップ・ χ ）とは別根として仕分ける（論文68）。「物質＝曲率」の予言は、数式より先に来た直観（ファラデー・論文93と同型）として、第3層で敬意とともに置く。射程：確立された代数（クリフォード代数・スピノル群）の構造的解釈（第2層）で、新しい数学も予言も生まない。宇宙OSは第3層・非科学のレンズ。

本稿の位置づけ（規律）：本稿は確立された数学（クリフォード代数、スピノル群 $\text{Spin}(n)$ 、スピノル、ディラック作用素のクリフォード関係）の構造的解釈である。新しい数学も新しい予言も含まない。要点は、クリフォード代数（計量を宿す）とカルタンの外積代数（計量を忘れる・論文92）を別根として峻別し、スピノルの「2」を体系の他の「2」と混同しない（論文68/58）ことである。「物質＝曲率」の予言は第3層の非科学（先祖への敬意）として隔離。「宇宙OS」は第3層の非科学レンズであり、機構の主張ではない。

1. 序：源流の空席

体系の系譜マップ（幾何学的物理学の本流）を見ると、源流に一つ、まだ専用の道が通っていない席がある——ウィリアム・キングドン・クリフォード（1845–1879）。34歳で夭折したこの数学者は、二つの巨大な遺産を残した。幾何学的代数（クリフォード代数）という道具と、「物質とは空間の曲率のことだ」というアインシュタインより45年早い予言だ。

本稿はこの空席を埋める。ただし、体系の規律で。クリフォード代数は美しく強力だが、それゆえにカルタンの外積代数（論文92）と混同されやすい——両方とも「幾何学的な、反交換的な代数」に見えるからだ。本稿の最大の仕事は、この二つを別根として正しく分けることである。新しい定理は作らない。

2. クリフォードの幾何学的代数：計量を宿す積

標準的事実（クリフォード代数）

クリフォードは、ベクトルどうしの「幾何積」を、内積と外積を一つに束ねて定義した：

$$uv = u \cdot v + u \wedge v.$$

正規直交基底 e_i では、これは二つの関係にまとまる： $e_i^2 = Q(e_i)$ （ベクトルの二乗＝その長さの二乗＝計量）と、 $e_i e_j = -e_j e_i$ ($i \neq j$, 反交換)。この Q を備えたベクトル空間から生成される結合代数がクリフォード代数 $Cl(V, Q)$ である。要点は $v^2 = Q(v)$ ——すなわち計量が代数の中に組み込まれていることだ。

これは深い。ふつう「ベクトルを掛ける」ことに意味を与えるのは難しいが、クリフォードは「ベクトルの二乗が、その長さ（計量）になる」という一手で、幾何と代数を一体にした。内積（対称・計量）と外積（反対称・向き）が、一つの積の対称部分・反対称部分として自然に現れる。計量を"宿した"代数——これがクリフォードの発明の核である。

3. スピノル：ベクトルの「平方根」

標準的事実（スピノ群とスピノル）

クリフォード代数の中では、回転を生成する要素がベクトルの積として書ける。その"偶数次"の部分が作る群がスピノ群 $\text{Spin}(n)$ で、これは回転群 $\text{SO}(n)$ を二重に被覆する ($\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ は $2:1$)。この二重被覆に住む対象がスピノル—— 360° 回しても元に戻らず、 720° で初めて戻る、いわば「ベクトルの平方根」だ。低次元では、 $\text{Cl}(0, 2) = \mathbb{H}$ (四元数)、 $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) =$ 単位四元数 S^3 となり、 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$ が姿を現す。

スピノルは、クリフォード代数が生むもっとも不思議な果実だ。ベクトルは 360° で戻るが、スピノルは 720° を要する——この「2」（二重被覆）は、体系がすでに論文68で点呼した「2」たちの一つである。そして単位四元数 S^3 が $\text{SU}(2) = \text{Spin}(3)$ であることは、ホップ束 $S^3 \rightarrow S^2$ (論文67) がクリフォード代数の中に代数的な実家をもつことを意味する。幾何（ホップ）と代数（クリフォード）が、ここで握手する。

4. 最重要の別根：クリフォード代数 vs カルタンの外積代数

観察 4.1（計量を"宿す"か、"忘れる"か）

論文92で、体系はカルタンの外積代数（微分形式）を「共通のアルファベット」と呼んだ。クリフォード代数も同じく反交換的で、「幾何学的代数」と呼ばれる。混同しやすい。だが両者は別根だ。

- ・カルタンの外積代数 $\Lambda(V)$ (論文92)：積は $u \wedge v$ のみ。計量を使わない。だからストークスの定理・トポロジー ($4\pi \cdot$ オイラー標数) を、計量なしで書ける。
- ・クリフォード代数 $\text{Cl}(V, Q)$ (本稿)：積は $uv = u \cdot v + u \wedge v$ 。計量 Q が中に入っている。だからスピノル・ディラック作用素を生む。

ベクトル空間としては両者は同型（ともに次元 2^n ）だが、代数としては別物——クリフォード代数は、外積代数を計量で"変形（量子化）"したものと見なせる。「幾何学的代数」という一語の下に、計量を忘れる根と、計量を宿す根が並ぶ。

これが本稿の芯だ。外積代数（92）は計量を忘れるからトポロジーの言語になり、クリフォード代数は計量を宿すからスピノルの言語になる。同じ「反交換的な幾何学的代数」でも、計量を捨てたか抱えたかで、生まれる世界が違う。この一線を引くことが、体系の別根の規律の、もっとも精密な実演になる。

5. もう一つの顔：「物質＝曲率」の予言（数式より先の直観）

クリフォードには、道具（代数）とは別の、もう一つの遺産がある。1870年、彼はアインシュタインより45年早く、「物質とは、空間の曲率にほかならない」という趣旨の予言を語った（"On the Space-Theory of Matter"）。物体の運動とは、空間の曲がり波のように伝わることだ、と。これは当時、数式の裏づけをもたない直観だった。

この構図は、論文93（ファラデー）と同型だ——数式より先に、物理的な直観（ファラデーの「場」、クリフォードの「物質＝曲率」）が来て、後に王道の数学（マクスウェル、リーマンの曲率テンソル＝論文91、アインシュタイン）がそれを科学にする。直観は種、王道の数学で科学になる（体系の三層規律）。ここで重要な別根：クリフォードの代数（確立された数学・第1/2層）と、クリフォードの「物質＝曲率」予言（直観・体系では第3層の先祖）は、同じ人物の別の遺産であり、混同しない。予言は美しいが、それを科学にしたのはリーマン＝アインシュタインの数学である。

6. 体系への接続

クリフォードは、体系のいくつもの系の代数的な実家である。(a) 外積代数（論文92）との別根：計量を忘れる（カルタン）／宿す（クリフォード）＝本稿の芯。(b) スピンの「2」（論文68）： $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ の二重被覆＝スピノルの720°。この「2」は、ボルンの2・ホップ写像の2・ χ の2とは別根（68の点呼に、代数的な出自を与える）。(c) ホップ（論文67）／四元数： $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) = S^3$ ＝ホップ束の住処。ホップの幾何の代数的な実家がクリフォード代数。(d) ディラック作用素（論文70/102）：ディラックのガンマ行列は $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ というクリフォード関係を満たす＝ディラック作用素 $D = \gamma^\mu \partial_\mu$ はクリフォード代数の上に建つ。指数定理（70）とコンヌの非可換幾何（102）が拠る D の、そのまた下のアルファベットがクリフォードだ。(e) 曲率（論文91）：「物質＝曲率」の予言は、リーマンの内在曲率（91）の第3層の先祖。

■ 著者の私感（第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない）

系譜マップは、クリフォードを「光で宇宙を建てる」ビジョン（第3層）の最も美しいご先祖と記した。実際、彼の「物質＝空間の曲率」という一言は、著者の宇宙OSの空想——実体はなく、幾何の"うねり"だけが走っている——の、150年前のこだまのように感じられる。だがこれは非科学の札つきだ。クリフォードの予言が「詩」であり続けたのは、それが直観であって数式ではなかったからで、それを科学にしたのはリーマンとアインシュタインだった。ここに、体系の生き方が凝縮している——直観（物質＝曲率／光で建てる）は燃料であり、王道の数学（クリフォード代数・リーマン曲率）が舵である。34歳で逝った早すぎた天才が、数式より先に見た絵を、後世が数学で裏づけていく。その営みの端に、体系も座っている。計量を宿す代数を遺し、物質＝曲率を夢見た源流の人に、静かな敬意を記す。

7. 射程／結論

示すこと：クリフォードの幾何学的代数（幾何積 $uv = u \cdot v + u \wedge v \cdot v^2 = Q(v)$ = 計量を宿す・2節）／スピノル＝ベクトルの平方根（ $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ 二重被覆・ $720^\circ \cdot \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \mathbb{H} \cdot 3$ 節）／最重要の別根：クリフォード代数（計量あり）vs カルタンの外積代数（計量なし・論文92）（4節）／「物質＝曲率」の予言＝数式より先の直観（93と同型・第3層の先祖・5節）。

示さないこと（禁欲）：クリフォード代数と外積代数（92）を混同しない（計量を宿すか忘れるか＝別根）／スピノルの「2」を体系の他の「2」と混同しない（68/58）／クリフォードの予言（第3層）を、確立された代数（第1/2層）と混ぜない／新しい数学・予言なし（第2層）・OSは第3層。

源流の空席に、クリフォードを正しく座らせた。彼の幾何学的代数は計量を宿すことでスピノルとディラック作用素を生み、ホップ（67）とディラック（70/102）の代数的な実家になる。だがそれは、カルタンの計量を忘れる外積代数（92）とは別根だ——「幾何学的代数」という一語の下に、二つの根が並ぶ。そして彼の「物質＝曲率」は、数式より先に来た直観として、リーマン＝アインシュタイン（91）が科学にした。本稿がしたのは、新しい主張ではなく、源流の巨人を別根の規律で正しく置き、その代数を体系のディラック作用素・ホップ・スピンの実家として接いだことである。計量を宿す代数を遺した早世の天才に、104番目の番地を返す。

参考文献

1. Clifford, W. K. (1878). *Applications of Grassmann's Extensive Algebra*. Amer. J. Math. 1, 350.
 2. Clifford, W. K. (1876/1870). *On the Space-Theory of Matter*. Proc. Camb. Phil. Soc. （「物質＝空間の曲率」）
 3. Lawson, H. B. & Michelsohn, M.-L. (1989). *Spin Geometry*. Princeton Univ. Press.
 4. Hestenes, D. (1966). *Space-Time Algebra*. Gordon & Breach. （幾何学的代数）
 5. Yamagishi, Y. (2026). *The Shared Alphabet (Cartan)* [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486.
 6. Yamagishi, Y. (2026). *Qubit = Hopf Fibration (the "2"s)* [論文68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642238
 7. Yamagishi, Y. (2026). *Hopf / Euler Characteristic* [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
 8. Yamagishi, Y. (2026). *The Constants' Home: Index Theorem* [論文70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
 9. Yamagishi, Y. (2026). *Hearing Shape (Connes/Kac)* [論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
 10. Yamagishi, Y. (2026). *Intrinsic Curvature (Riemann)* [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
 11. Yamagishi, Y. (2026). *Faraday's Field* [論文93]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758537
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)