マクスウェルの魚眼で光が円を描くのは、屈折率が球面の地図の縮尺だからである

— 光学計量のガウス曲率はどこでも +1、平面全体の光学的な面積は 12.566370614 で球面の 4π、どの向きに出した光も光路長 π で対蹠点の像に集まる — 分離子は、屈折率が曲率を正にするか負にするか — [論文1045]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

マクスウェルの魚眼は、屈折率が 2/(1+r²) の媒質である。その中で光は円を描き、一点から出た光はどの向きに出しても一点に集まる。本稿はそれを、球面の地図として数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。屈折率は地図の縮尺そのものである——半径 1 の球面を北極から平面へ写す立体射影で、球面の極角と平面の半径は r＝tan(θ/2) で対応し、そこでの地図の縮尺は 2/(1+r²) に等しい。極角 60 度で屈折率 1.500000000、120 度で 0.500000000、150 度で 0.133974596 と、縮尺 2cos²(θ/2) に全桁で一致した（第3節）。 第二に、この幾何の曲率はどこでも +1 である——光学計量のガウス曲率を差分で出すと、点 (0.3, 0.4) で 1.000000022、(1.0, 0.0) で 1.000000000、(1.5, −0.7) で 0.999999808、(3.0, 2.0) で 1.000006566 であった。比べ役に重力レンズの屈折率を入れると −0.060948482 と負になる（第2節）。 第三に、平面ぜんぶで球面ひとつぶんである——平面全体の光学的な面積は 12.566370614 で、球面の 4π と全桁で一致した。半径 1 の内側と外側の寄与はどちらも 1.000000000000 で等しく、赤道で分けた二つの半球にあたる（第3節）。 第四に、光は円を描き、光路長 π で対蹠点に集まる——出発点 (0.5, 0) から五つの向きに出した光は、どれも円を描き（半径 2.500000000・1.443375673・1.250000000、円からのずれは最大 7.998×10 の −12 乗）、光路長 π でちょうど像の点 (−2.0, 0) に集まった（ずれは最大 6.868×10 の −12 乗）（第4節）。 第五に、光路長 2π で出発点に戻る——同じ光を 2π まで進めると、五つの向きとも出発点に戻った（ずれは最大 1.717×10 の −12 乗）。球面では大円を一周したことにあたる（第4節）。 第六に、分離子は、屈折率が曲率を正にするか負にするかである——同じ光学計量の枠で、曲率が負なら道は開いて外側に積んだ曲率が曲がりの角になり、正なら道は閉じて対蹠点に像を結ぶ。分けているのは屈折率の分布ひとつである（第5節）。 キーワード：マクスウェルの魚眼、立体射影、光学計量、ガウス曲率、完全結像、幾何光学。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——マクスウェルの魚眼が完全結像を与えること、その光学計量が球面と等長であること、立体射影が等角写像であることは、いずれも既知である（マクスウェル 1854、ボルンとウォルフ 1999）。完全結像の実現可能性を論じない——損失も分散も入れず、実在の材料について何も主張しない。波動光学を扱わない——回折の限界、近接場、共鳴は主題ではない。幾何光学の道だけを見る。変換光学の一般論を作らない——任意の写像や不可視化には入らず、この一つの屈折率だけを見る。重力に戻らない——曲率が負になる場合は論文1044 が数えた。値は例である——出発点、向き、刻みは与えた数である。既刊との関係：論文212 は、どんな地図も必ず何かを歪めることを、メルカトル・ランベルト・正距円筒の三つで数えた——ここでは四つ目の地図（立体射影）を取り、その歪みを捨てずに屈折率として引き受ける。論文219 は、平らな板が焦点を結ぶことを示した——あちらは屈折率が負の板、こちらは屈折率が場所ごとに変わる平面である。論文487 は、停留点が最小・最大・どこでも同じの三通りあることを示した——魚眼の結像はその三つ目にあたり、どの道も同じ長さ π である。論文128 は、立体射影で押し出した場の零点がただ一つで指数が 2 になることを示した——同じ地図を、あちらは場の数え方に、こちらは光の道に使う。論文1044 は、重力レンズの光学計量の曲率が負であることを示した——本稿はその符号を逆にした側であり、比べ役の -0.060948482 はその編の値である。加えたのは、曲率を四つの点で出してどこでも +1 であることを確かめたこと、屈折率が立体射影の縮尺に一致することを五つの極角で確かめたこと、光学的な距離と面積を球面の極角と 4π に突き合わせたこと、光の道が円であることと対蹠点に集まることを五つの向きで数えたこと、曲率の符号が結像の作り方を分けることを 1044 と対で置いたことである。

1. 記法と問い

設定：平面の各点に屈折率 $n(r) = 2/(1+r^2)$ を置く（r は原点からの距離）。これがマクスウェルの魚眼である。光の道は、この媒質の幾何（光学計量 $n^2(dx^2+dy^2)$）の測地線になる（フェルマーの原理）。出発点は $(0.5, 0)$、出す向きは 30・60・90・120・150 度、積分は一周あたり 20000 段のルンゲ＝クッタ法で行った。

問い：なぜ光は円を描き、どの向きに出しても一点に集まるのか。

2. 光学計量の曲率はどこでも $+1$ である

計算 2.1：ガウス曲率を、対数の屈折率のラプラシアンから差分で出した。

点	原点からの距離	ガウス曲率
$(0.3, 0.4)$	0.500000000	1.000000022
$(1.0, 0.0)$	1.000000000	1.000000000
$(1.5, -0.7)$	1.655294536	0.999999808
$(3.0, 2.0)$	3.605551275	1.000006566

どれも $+1$ からの差は 10^{-5} より小さく、差が大きいのは遠い点である（差分の刻みに対して屈折率が小さくなるため）。比べ役として、重力レンズの屈折率 $1 + 2m/r$（$m = 0.05$）を同じ式に入れると、点 $(1, 0.3)$ で $\mathbf{-0.060948482}$ と負になる（論文1044 の値）。

> **観察 2.2**
>
> この幾何は閉じている。曲率が至るところ $+1$ ということは、光の住む幾何が半径 1 の球面と同じだということである——球面には平行線が無く、どの測地線も閉じる。光が円を描くことも、集まることも、この一つの事実の見え方である。

3. 魚眼は球面の地図である

事実 3.1：半径 1 の球面を北極から平面へ写す立体射影では、球面の極角 θ と平面の半径 r が $r = \tan(\theta/2)$ で対応し、地図の縮尺（球面の長さを平面の長さで割った値）は $2/(1 + r^2)$ になる。これは魚眼の屈折率そのものである。

計算 3.2：五つの極角で、屈折率と縮尺 $2\cos^2(\theta/2)$ を突き合わせた。

球面の極角	平面の半径	そこでの屈折率	縮尺 $2\cos^2(\theta/2)$
30 度	0.267949192	1.866025404	1.866025404
60 度	0.577350269	1.500000000	1.500000000
90 度	1.000000000	1.000000000	1.000000000
120 度	1.732050808	0.500000000	0.500000000
150 度	3.732050808	0.133974596	0.133974596

五つとも 10^{-12} 以内で一致した。半径 1 の円（屈折率がちょうど 1）が球面の赤道にあたる。

計算 3.3：原点から半径 R までの光学的な距離（屈折率を積んだ長さ）を、球面の極角 $2\arctan(R)$ と比べた。

半径 R	光学的な距離	球面の極角
0.5	0.927295218	0.927295218
1.0	1.570796327	1.570796327
2.0	2.214297436	2.214297436

計算 3.4：平面全体の光学的な面積は **12.566370614** で、球面の 4π と全桁で一致した。半径 1 の内側の寄与は **1.000000000000**、外側の寄与も **1.000000000000** で等しい（外側は $u = 1/r$ に写して積んだ）。

> **観察 3.5**
>
> 屈折率は歪みそのものである。論文212 は、どんな地図も必ず何かを歪めることを三つの投影で数えた——ここでは歪みを誤差として嘆くかわりに、そのぶんだけ光を遅くする媒質を置いた。すると平面の上で球面の幾何が動きはじめる。無限に広い平面が、光にとっては面積 4π の有限の面になる。

4. 光は円を描き、光路長 π で対蹠点に集まる

計算 4.1：出発点 $(0.5, 0)$ から五つの向きに光を出し、道を追った。立体射影で対蹠点に当たる平面の点は $-P/|P|^2 = (-2.0, 0)$ である。

向き	円の中心	円の半径	円からのずれ	長さ π で像からのずれ
30 度	$(-0.750000, 2.165064)$	2.500000000	7.998×10^{-12}	6.868×10^{-12}
60 度	$(-0.750000, 0.721688)$	1.443375673	3.444×10^{-13}	4.396×10^{-13}
90 度	$(-0.750000, 0)$	1.250000000	4.974×10^{-14}	6.926×10^{-14}
120 度	$(-0.750000, -0.721688)$	1.443375673	2.487×10^{-14}	1.601×10^{-14}
150 度	$(-0.750000, -2.165064)$	2.500000000	7.105×10^{-15}	6.596×10^{-15}

どの道も円で、中心の横座標は五つとも -0.750000 で同じである。光路長を 2π まで伸ばすと、五つとも出発点に戻った（ずれは最大 1.717×10^{-12}）。

> **観察 4.2**
>
> 三つの不思議が一つになる。球面の上では、測地線は大円であり、どの大円も出発点の対蹠点を通り、長さ 2π で一周する——平面に写せば、大円は円に、対蹠点は一つの像に、一周は 2π の光路長になる。魚眼で光が円を描くことと、向きによらず一点に集まることと、2π で戻ることは、別々の性質ではなく同じ一つの事実である。

> **観察 4.3**
>
> どの道も同じ長さである。論文487 は停留点が最小・最大・どこでも同じの三通りあることを示した——魚眼の結像はその三つ目である。出発点から像までの道は無数にあり、そのすべてが長さ π でちょうど等しい。

5. 分離子：屈折率が曲率を正にするか負にするか

> **観察 5.1**
>
> 同じ枠で、符号だけが違う。光学計量という枠は同じで、屈折率の分布が違うだけである——重力レンズの $1 + 2m/r$ ではガウス曲率が -0.060948482 と負で、道は開き、曲がりの角は道の外側に積んだ曲率として出る（論文1044）。魚眼の $2/(1 + r^2)$ では曲率が 1.000000022 と正で、道は閉じ、光は対蹠点に集まる。

> **観察 5.2**
>
> 像の作り方が変わる。負の曲率では、集まる先は焦点であり、そこへ行くのは特定の道だけである——正の曲率では、集まる先は対蹠点であり、すべての道がそこを通る。どちらも「光が集まる」と言えるが、集め方が別である。

6. 言っていないこと

> **観察 6.1**
>
> 実在の材料について何も言わない。損失も分散も入れず、屈折率 **0.133974596** のような値を作れるかは論じない——波動光学にも入らない（回折の限界、近接場、共鳴は主題ではない）。変換光学の一般論も作らない——任意の写像や不可視化には入らず、この一つの屈折率だけを見た。重力にも戻らない——曲率が負になる側は論文**1044** の仕事である。

7. 点呼と結び

1. 曲率 **1.000000022**・**0.999999808**・**1.000006566**（計算 2.1）：どこでも **+1**。
2. 比べ役は **−0.060948482**（計算 2.1）：重力レンズなら負。
3. 屈折率 **1.866025404**・**0.500000000**・**0.133974596**（計算 3.2）：縮尺と一致。
4. 光学的な距離 **0.927295218**・**2.214297436**（計算 3.3）：球面の極角。
5. 光学的な面積 **12.566370614**（計算 3.4）：球面の **4π**。
6. 内側も外側も **1.000000000000**（計算 3.4）：半球ずつ。
7. 円の半径 **2.500000000**・**1.443375673**・**1.250000000**（計算 4.1）：道は円。
8. 像からのずれ最大 $\mathbf{6.868} \times 10^{-12}$（計算 4.1）：対蹠点に集まる。
9. 戻りのずれ最大 $\mathbf{1.717} \times 10^{-12}$（計算 4.1）：**2π** で一周。
10. 曲率の符号（観察 5.1）：分離子。論文**212**・**219**・**487**・**128**・**1044**。

結び：マクスウェルの魚眼で光が円を描くのは、屈折率が球面の地図の縮尺だからである。立体射影という地図で、球面の極角と平面の半径は $r = \tan(\theta/2)$ で対応し、そこでの縮尺は $2/(1+r^2)$ に等しい。屈折率をその縮尺に取れば、光学計量のガウス曲率はどこでも **+1** になり（**1.000000022**・**0.999999808**・**1.000006566**）、平面全体の光学的な面積は **12.566370614** で球面の **4π** と一致する——だから光は大円を進む。平面に写せば円になり（半径 **2.500000000**・**1.443375673**・**1.250000000**）、どの向きに出しても光路長 **π** で対蹠点の像に集まり、**2π** で出発点に戻る。分離子は、屈折率が曲率を正にするか負にするかである——負なら道は開いて焦点に集め、正なら道は閉じて対蹠点に集める。既刊の中に置けば——論文**212** が数えた地図の歪みを、捨てずに屈折率として引き受けたものであり、論文**1044** が曲率の負の側を数えたのに対して、こちらは正の側である。正直に書けば——魚眼は **1854** 年からあり、球面との等長も既知である。加えたのは、屈折率と縮尺、距離と極角、面積と **4π**、道と大円を一つずつ数字で突き合わせ、曲率の符号を分離子として置いたことである。

参考文献

1. Born, M., & Wolf, E. (1999). *Principles of Optics* (7th ed.). Cambridge University Press.
2. Maxwell, J. C. (1854). Solutions of Problems. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*.
3. 山岸勇輝 (2026).『$4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである』[論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
4. 山岸勇輝 (2026).『どんな地図も、必ず何かを歪める』[論文212]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22112104
5. 山岸勇輝 (2026).『平らな板が、焦点を結ぶ』[論文219]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119788
6. 山岸勇輝 (2026).『停留点は三通りある —— 最小と、最大と、どこでも同じ』[論文487]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759965
7. 山岸勇輝 (2026).『重力レンズで光は集まるのに、その光の幾何の曲率は負である』[論文1044]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22861082

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)