二本のパルサーの時刻のずれの相関は、二つの方向のなす角だけの関数である

— 距離にも天球のどこに在るかにもよらず、曲線は 49.317267601 度と 121.788897909 度で 0 を切り、82.483969242 度で底 −0.151897312761 を取る — 分離子は、応答が四重極か、単極か双極か — [論文 1047]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

全天から来る重力波の背景は、遠くのパルサーの時刻を揺らす。二本の時刻のずれを突き合わせると、相関は一本の曲線に乗る。本稿はその曲線を、二通りの道で出して突き合わせる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、これが本稿の芯である。相関に入るのは、なす角ひとつだけである——全天の積分と閉じた式は、なす角 30 度で **0.211633634877** 対 **0.211627828168**、90 度で **−0.144858678228** 対 **−0.144860385420**、180 度で **0.250000000000** 対 **0.250000000000** と合い、五つの角での差は最大 **1.154**×10 の −5 乗であった（第3節）。 第二に、規格化は曲線に合わせて決めていない——一本のパルサーの応答の二乗を全天で平均すると **0.333333333333**（1/3・差 **3.442**×10 の −15 乗）になり、そこから規格化の係数が 3/2 と決まる。曲線に合わせ込んだのではなく、別の一点から決めた尺度で五つの角が合った（第2節）。 第三に、曲線は二度 0 を切る——0 を切るのは **49.317267601** 度と **121.788897909** 度、底は **82.483969242** 度で **−0.151897312761** である。底の位置は x が e の −5/6 乗（**0.434598208507**）になる角で、二つの零点の真ん中（**85.553082755** 度）ではない（第4節）。 第四に、形は波の型の指紋である——同じ積分で応答だけを差し替えると、向きによらない応答（単極）では相関はなす角によらず **1.000000000000**、進む向きとの内積の応答（双極）では cos を 3 で割った値（30 度で **0.288675134595**、180 度で **−0.333333333333**）になる。零点の数は 0・1・2 と変わる（第5節）。 第五に、距離にも位置にもよらない——同じなす角の二本を天球の別の場所へ回して置くと、相関の振れは最大 **1.024**×10 の −5 乗で、なす角を 0.05 度動かしたときの変化 **1.004**×10 の −4 乗より小さい。曲線の値そのものの千分の一より小さい（第6節）。 第六に、時間の測定から、角度の関数が出る——測っているのは時計の刻みのずれだけであり、そこから出てくるのは天球の上の角の関数である。分離子は、応答が四重極か、単極か双極かである（第5節）。 キーワード：パルサータイミング、重力波の背景、ヘリングス＝ダウンズ曲線、四重極、相関関数、等方性。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——等方な重力波の背景に対する二本のパルサーの相関が、なす角だけの関数になり、その形が閉じた式で書けることは既知である（ヘリングスとダウンズ 1983）。観測の統計を扱わない——有意性、宇宙分散、パルサー項、雑音の模型には入らない。発生源を扱わない——背景が超大質量の連星から来るのか初期の宇宙から来るのかは主題ではない。別の重力理論を扱わない——単極と双極は応答の形を差し替えた比べ役であって、理論ではない。四重極公式の係数に入らない——G と c の 5 乗の読み方は論文42 の仕事である。値は例である——格子の細かさ、なす角、回して置いた向きは与えた数である。既刊との関係：論文42 は、四重極公式の G と c の 5 乗が切り離せないことを示した——ここでは同じ四重極が、係数ではなく曲線の形として出てくる。論文111 は、光が幾何をどこまで決めるかを、共形構造で止まる二つの道として数えた——ここでは重力波と時計が、天球の上の角の関数を決める。論文118 は、座標時間と固有時とエントロピーが三つの異なる論理型であることを示した——ここで測るのは時計の刻みのずれだけで、出てくるのは幾何である。論文906 は、偏光を閉じた道で一周させると位相が囲んだ立体角の半分だけ動くことを示した——あちらは一周して残る面積、こちらは全天で平均して残る角である。加えたのは、全天の積分と閉じた式を五つの角で突き合わせたこと、規格化を曲線と無関係な一点（応答の二乗の全天平均が 1/3）から決めたこと、底と二つの零点を数で出し、底が零点の真ん中でないことを示したこと、応答を単極と双極に差し替えて零点の数が変わることを見たこと、置き方を回しても値が変わらないことを、なす角の感度と比べて示したことである。

1. 記法と問い

設定：全天から等方にやってくる重力波の背景を考える。向き $\hat{p}$ にあるパルサーの時刻のずれへの応答は、波の進む向き $\hat{\Omega}$ と偏光 A について $F^A = \frac{1}{2} p^i p^j e^A_{ij}(\hat{\Omega}) / (1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p})$ である。二本の相関は、この積を全天と二つの偏光について平均した量である。積分はガウス＝ルジャンドル 400 点（向きの余弦）と一様 800 点（方位角）で行った。

問い：二本の時計のずれの相関は、何で決まるのか。

2. 規格化を、曲線と無関係に決める

計算 2.1：一本のパルサーの応答の二乗を全天で平均すると **0.333333333333** であった（1/3 との差 $\mathbf{3.442} \times 10^{-15}$）。なす角 0 での相関を 1/2 と約束すると、規格化の係数は **1.500000000000**（3/2）と決まる。

> **観察 2.2**
>
> 尺度は曲線の外から来る。この 3/2 は、曲線のどの点にも合わせ込んでいない——一本のパルサーだけで決まる量から出た尺度である。だから次節で五つの角が合うことは、合わせ込みの結果ではない。

3. 全天の積分と閉じた式

計算 3.1：五つのなす角で、積分と閉じた式を突き合わせた。

なす角	全天の積分	閉じた式	差
30 度	0.211633634877	0.211627828168	5.807×10^{-6}
60 度	−0.082371923584	−0.082360385420	1.154×10^{-5}
90 度	−0.144858678228	−0.144860385420	1.707×10^{-6}
120 度	−0.011143630232	−0.011142331508	1.299×10^{-6}
180 度	0.250000000000	0.250000000000	8.327×10^{-17}

閉じた式は $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3}{2} x \ln x$（$x = (1 - \cos\theta)/2$）である。五つの角での差は最大 $\mathbf{1.154 \times 10^{-5}}$ で、真向かい（180 度）ではちょうど $1/4$ になる。

> **観察 3.2**
>
> 入るのはなす角だけである。パルサーまでの距離も、天球のどこに在るかも、式にも積分にも入らない——入るのは二つの向きの内積ひとつである。

4. 曲線の形（底と、二つの零点）

計算 4.1：底は x について微分して $\ln x = 1/6 - 1$ から決まり、$x = \mathbf{0.434598208507}$（e の $-5/6$ 乗）、なす角 **82.483969242** 度、値 **−0.151897312761** である。400001 点の格子で最小を探すと **82.484131040** 度・**−0.151897312757** で、0.000162 度しか違わない。

計算 4.2：0 を切るのは **49.317267601** 度と **121.788897909** 度である。積分の側でも符号が変わり、49 度で **0.002893865042**、50 度で **−0.006151489754**、121 度で **−0.004934658415**、123 度で **0.007615786702** であった。

> **観察 4.3**
>
> 底は真ん中ではない。二つの零点の真ん中は **85.553082755** 度だが、底は **82.483969242** 度にある——曲線は左右対称ではない。対称でないのは $x \ln x$ の項が入っているからで、この非対称そのものが形の一部である。

5. 形は、波の型の指紋である

計算 **5.1**：同じ積分で、応答だけを差し替えた。

なす角	単極（向きによらない）	双極（進む向きとの内積）	四重極（本来の応答）
30 度	1.000000000000	0.288675134595	0.211633634877
60 度	1.000000000000	0.166666666667	−0.082371923584
90 度	1.000000000000	0.000000000000	−0.144858678228
120 度	1.000000000000	−0.166666666667	−0.011143630232
180 度	1.000000000000	−0.333333333333	0.250000000000

双極は $\cos\theta/3$ と 10^{-9} 以内で一致した。零点の数は、単極が 0 個、双極が 1 個（90 度）、四重極が 2 個である。

> **観察 5.2**
>
> 曲線が波の型を数える。相関の曲線は、背景の強さも、どこから来たかも語らないが、応答が何次の多重極かは語る——零点の数と、真向かいで正に戻るかどうかが、その指紋である。論文42 の四重極は、ここでは係数ではなく形として出てくる。

6. 距離にも、天球の位置にもよらない

計算 **6.1**：なす角 **75** 度の二本を、天球の別の場所へ三通り回して置いた。内積はどれも **0.258819045103** で変わらず、相関は **−0.144450506396**・**−0.144460743845**・**−0.144450219375**・**−0.144449434177** であった。振れの最大は $\mathbf{1.024} \times 10^{-5}$ で、なす角を 0.05 度動かしたときの変化 $\mathbf{1.004} \times 10^{-4}$ より小さく、値そのものの千分の一より小さい。

観察 6.2

残る振れは格子のものである。回して置くと応答の分母が小さくなる点が格子に対して別の位置に来るので、積分の精度がわずかに変わる——曲線が場所によるのではない。この振れは、なす角を 0.05 度変えるよりも小さい。

7. 言っていないこと

観察 7.1

観測の統計を扱わない。有意性、宇宙分散、パルサー項、雑音の模型には入らない——背景がどこから来るか（超大質量の連星か、初期の宇宙か）も主題ではない。別の重力理論も扱わない——単極と双極は応答の形を差し替えた比べ役であって、理論ではない。四重極公式の係数にも入らない——G と c の 5 乗の読み方は論文42 の仕事である。

8. 点呼と結び

1. 応答の二乗の全天平均 **0.333333333333**（計算 2.1）：尺度は曲線の外から。
2. 規格化 **1.500000000000**（計算 2.1）：合わせ込みではない。
3. 30 度で **0.211633634877** 対 **0.211627828168**（計算 3.1）：二つの道が合う。
4. 最大の差 $\mathbf{1.154 \times 10^{-5}}$（計算 3.1）：五つの角で。
5. 真向かいで **0.250000000000**（計算 3.1）：ちょうど 1/4。
6. 底 **82.483969242** 度・**−0.151897312761**（計算 4.1）：e の −5/6 乗。
7. 零点 **49.317267601** 度と **121.788897909** 度（計算 4.2）：二度切る。
8. 真ん中は **85.553082755** 度（観察 4.3）：底はそこではない。
9. 双極は **0.288675134595** から **−0.333333333333**（計算 5.1）：零点は一つ。
10. 置き方の振れ $\mathbf{1.024 \times 10^{-5}}$（計算 6.1）：角を 0.05 度動かすより小さい。
11. 四重極か、単極か双極か（観察 5.2）：分離子。論文42・111・118・906。

結び：二本のパルサーの時刻のずれの相関は、二つの方向のなす角だけの関数である。全天の積分と閉じた式は、30 度で 0.211633634877 と 0.211627828168、90 度で −0.144858678228 と −0.144860385420、真向かいでちょうど 0.250000000000 と合い、五つの角での差は最大 1.154×10 の −5 乗であった。尺度は曲線に合わせず、一本の応答の二乗の全天平均 0.333333333333 から 3/2 と決めた——曲線は 49.317267601 度と 121.788897909 度で 0

を切り、**82.483969242** 度で底 **−0.151897312761** を取る。底は二つの零点の真ん中 **85.553082755** 度ではない。分離子は、応答が四重極か、単極か双極かである——応答を差し替えると、単極では角によらず **1.000000000000**、双極では **cos** を **3** で割った値になり、零点の数が **0・1・2** と変わる。既刊の中に置けば——論文**42** の四重極がここでは係数ではなく曲線の形として出てくる。測っているのは時計の刻みのずれだけで、出てくるのは天球の上の角の関数である。正直に書けば——この曲線は **1983** 年からある。加えたのは、規格化を曲線と無関係な一点から決めて二つの道を突き合わせたこと、底が零点の真ん中でないことを数で示したこと、応答を差し替えて零点の数が変わることを見たことである。

参考文献

1. Agazie, G., et al. (NANOGrav Collaboration) (2023). The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background. *The Astrophysical Journal Letters*.
2. Hellings, R. W., & Downs, G. S. (1983). Upper limits on the isotropic gravitational radiation background from pulsar timing analysis. *The Astrophysical Journal Letters*.
3. 山岸勇輝 (2026). 『四重極公式の G と c^5 は、切り離せない』[論文42]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601988
4. 山岸勇輝 (2026). 『光はどこまで幾何を決めるか』[論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
5. 山岸勇輝 (2026). 『二つの時計と、一枚の目盛り』[論文118]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036237
6. 山岸勇輝 (2026). 『偏光を閉じた道で一周させると、位相は囲んだ立体角の半分だけ動く』[論文906]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22803812

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)