

4次元だけの例外 — ドナルドソンのエキゾチック $\mathbb{R}^4$ と、「なぜ3+1次元か」の過剰決定にもう一本 — [論文105]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文69は「なぜ3+1次元か」を過剰決定センサス——互いに独立な複数の基準が、そろって4次元を指す——として描いた。本稿は、そのセンサスにもう一本、深く独立な根を足す。サイモン・ドナルドソンのエキゾチック $\mathbb{R}^4$ だ。驚くべき事実：ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の「滑らかな構造（微分構造）」は、 $n \neq 4$ のすべての次元でただ一つに決まる。ところが $n = 4$ だけは、位相的には同じ $\mathbb{R}^4$ なのに、互いに微分同相でない滑らかな構造が非可算無限個存在する。4次元は、微分トポロジーの深い意味で例外的に特別なのだ。しかも、この特異性を暴いた道具はゲージ理論だった——ドナルドソンはヤン＝ミルズのインスタントン（自己双対接続のモジュライ）で4次元多様体の交叉形式を制約し（ドナルドソンの定理）、フリードマンの位相的分類と突き合わせて、エキゾチック $\mathbb{R}^4$ の存在を導いた。ここに体系の糸が集まる：ゲージ（論文96）・ホップ（67）・ディラック/クリフォード（70/104）が、4次元の例外性の証明に動員される。本稿の規律：(1) 別根——この「4」（微分構造の例外）は、論文69が集めた他の「4を選ぶ理由」（マクスウェルの共形不変・重力子の自由度・因子2の交差・ χ 偶数）とは独立な別根であり、それゆえ過剰決定を強める。(2) 位相と微分の別根——フリードマン（位相的・連続）とドナルドソン（微分的・滑らか）は同じ4次元でも別カテゴリー＝別根（論文103と同じ線）。(3) admire——「4でなければならない」の証明ではない（記述的な過剰決定）／数の4を語呂合わせしない（論文94/101）。射程：確立された微分トポロジーの構造的解釈（第2層）で、新しい数学も予言も生まない。宇宙OSは第3層・非科学のレンズ。

本稿の位置づけ（規律）：本稿は確立された微分トポロジー（ドナルドソンの定理、エキゾチック $\mathbb{R}^4$ 、フリードマンの位相的分類）の構造的解釈である。新しい数学も新しい予言も含まない。要点は、論文69の過剰決定センサスに独立な根（4次元だけの微分構造の例外）を一本追加し、位相（フリードマン）と微分（ドナルドソン）を別根として峻別することである。「4次元でなければならない」の証明ではない（記述的な過剰決定・admire-don't-attempt）／数の4を体系の他の数と語呂合わせしない（論文94/101）。「宇宙OS」は第3層の非科学レンズであり、機構の主張ではない。

1. 序：4次元は、なぜか特別だ

論文69で、体系は「なぜ我々の宇宙は3+1次元か」を、一つの決定的理由ではなく過剰決定

(**overdetermination**) として描いた——互いに独立な複数の基準（マクスウェル方程式の共形不変、重力子の自由度、論文58の因子2の交差、球のオイラー標数 χ が偶数...）が、そろって4次元を指す。一つの偶然ではなく、いくつもの独立な条件が同じ答えを強制している状態だ。

本稿は、このセンサスにもう一本、とりわけ深く独立な根を足す。それは物理ではなく、純粋な微分トポロジーからやってくる——サイモン・ドナルドソン（1957-）のエキゾチック $\mathbb{R}^4$ だ。4次元は、数学それ自体の深いところで、他のどの次元とも違う。新しい定理は作らない。69のジグ（過剰決定センサス）に、この一本を正しく組み込む。

2. ドナルドソンの定理とエキゾチック $\mathbb{R}^4$

標準的事実（ $\mathbb{R}^4$ だけの例外）

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造（微分構造）——「どの座標変換を滑らかと認めるか」の取り決め——は、 $n \neq 4$ のすべての次元で、微分同相を除いてただ一つに定まる。ところが $n = 4$ だけは例外で、位相的には標準の $\mathbb{R}^4$ と同じ（同相）なのに、互いに微分同相でない滑らかな構造が非可算無限個（連続体濃度）存在する——これをエキゾチック $\mathbb{R}^4$ と呼ぶ。サイモン・ドナルドソンは1983年、閉じた滑らかな4次元多様体の交叉形式に強い制約を課す定理（正定値なら $\mathbb{Z}$ 上で対角化可能）を証明し、これがマイケル・フリードマンの位相的分類と突き合わさって、エキゾチック $\mathbb{R}^4$ の存在を導いた。

これは、素朴な直観を裏切る衝撃的な事実だ。「平らな空間 $\mathbb{R}^n$ 」ほど単純なものはないと思える。実際、 $n = 1, 2, 3, 5, 6, \dots$ では、 $\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造はただ一つ。ところがちょうど4次元——我々が住む時空の空間次元+1、あるいは時空そのものの次元——でだけ、平らな空間が無数の"隠れた"滑らかさをもつ。次元の中で、4だけが割れている。

3. 4次元を暴いた道具は、ゲージ理論だった

観察 3.1 (インスタントンが4次元の特異性を映す)

ドナルドソンが4次元の例外性を暴くのに使った道具は、物理由来のヤン＝ミルズのゲージ理論だった。とくにインスタントン（自己双対な接続 $F = \star F$ ）のモジュライ空間を調べることで、滑らかな4次元多様体の形に制約を課した。インスタントン数は第2チャーン類 $\frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr}(F \wedge F)$ で数えられ、自己双対性 $F = \star F$ が本質的に効くのは次元が4のときだけ（2-形式の $\star$ が 2-形式に戻る）。すなわちゲージ場の幾何そのものが、4次元でだけ特別な振る舞いを見せる。

ここで体系の糸が一点に集まる。ゲージ原理（論文96・ワイル）、その接続の曲率 $F = dA$ （論文92）、 $16\pi^2$ という規格化（論文45/70）、そして自己双対性が住む4次元——これらが、ドナルドソンの証明で4次元の例外性という一つの事実に収束する。4次元が特別なのは物理の都合ではなく、ゲージ場の幾何と微分トポロジーの深いところで起きている。ただし規律： $16\pi^2$ がここに現れることと、体系の他の $16\pi^2$ （論文45等）が同根かは詰めていない——共鳴として記録し、同一視しない（論文48/70）。

4. 位相と微分は、別の根

観察 4.1 (フリードマン vs ドナルドソン＝別カテゴリー)

4次元の物語には、二人の巨匠がいる（ともに1986年フィールズ賞）。マイケル・フリードマンは位相的な4次元多様体を分類した（連続・同相のレベル）。サイモン・ドナルドソンは微分的な制約を課した（滑らか・微分同相のレベル）。二人の結果を突き合わせると、「位相的には存在するのに、滑らかにはできない4次元多様体」や、エキゾチック $\mathbb{R}^4$ が現れる。要点：位相（連続）と微分（滑らか）は別のカテゴリー＝別根であり、4次元でだけ、この二つが大きくずれる。同じ「4次元」でも、位相の顔と微分の顔は別物だ——これは論文103（3次元ポアンカレは解決／4次元 smooth は未解決）で引いたのと同じ線である。

この別根は重要だ。「4次元は特別」と一口に言っても、位相的に特別なのか、微分的に特別なのかで意味が違う。エキゾチック $\mathbb{R}^4$ の衝撃は、位相と微分が4次元でだけ劇的に食い違うことにある。体系は、この二つのカテゴリーを混ぜない——「4が特別」を、どの意味で特別かまで含めて正確に言う。

5. 過剰決定センサスに、一本足す (J3)

観察 5.1 (69のセンサスへの独立な追加)

論文69は、4次元を選ぶ互いに独立な基準を集めて「過剰決定」とした。本稿は、そこにドナルドソンの根を一本加える：

- ・ (69の既存) マクスウェルの共形不変が4次元／重力子の自由度／論文58の因子2の交差／ χ が偶数.....
- ・ (新規) 微分構造の例外： $\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造が唯一でないのは $n = 4$ だけ (エキゾチック $\mathbb{R}^4$)。

この新しい根は、他のどの基準とも出自が独立 (微分トポロジー由来) だ。だから、これを足すことは過剰決定をさらに強める——「4次元」は、物理の理由だけでなく、数学それ自体の理由からも、幾重にも支えられた交差点だと分かる。

これが、体系のジグ J3 (過剰決定センサス) の使い方だ。新しい独立な根を見つけたら、それが本当に独立か (別根か) を確かめたうえで、センサスに加える。ドナルドソンの根は、その資格を十分に満たす。ただし——足すのは「4次元は驚くほど多方向から特別だ」という記述であって、「4次元でなければならない」という証明ではない (69と同じ、正直な射程)。

6. 体系への接続

ドナルドソンは、体系のいくつかの糸と交わる。(a) 過剰決定センサス (論文69) = J3 : 4次元だけの微分構造の例外を、独立な根として69に追加 = 本稿の芯。(b) ゲージ (論文96) : 4次元の例外性を暴いた道具がインスタントン (自己双対接続) = ワイルのゲージ原理の幾何が、ここで4次元の特異性を映す。(c) ホップ／クリフォード (論文67/104) : インスタントンは $S^3 = \text{SU}(2)$ (ホップ・クリフォードの実家) 上のゲージ場と結びつく。(d) $16\pi^2 \cdot$ 指数定理 (論文45/70) : インスタントン数 = 第2チャーン類 $\frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr}(F \wedge F)$ 。ただし体系の他の $16\pi^2$ と同根かは未詰め (共鳴・非同一)。(e) ポアンカレ／リッチ・フロー (論文103) : 4次元 smooth ポアンカレの未解決は、この微分トポロジーの難しさの一部 = admire-don't-attempt。位相 (フリードマン) と微分 (ドナルドソン) の別根も、103と同じ線。

■ 著者の私感（第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない）

体系のレンズ（比喻）では、宇宙OSがなぜ4次元（3+1）で世界をレンダリングするのか——その問いに、ドナルドソンは物理を一切使わずに、数学だけで「4次元はそもそも異質だ」と答えているように感じられる。平らな空間さえ、4次元でだけ無数の"隠れた滑らかさ"をもつ——まるで、4次元という舞台だけに、他の次元にはない"奥行き"が仕込まれているかのように。だがこれは非科学の札つきだ。「OSが4次元を選んだ」は直観を運ぶ比喻であって、機構でも予言でもない。ここで確かなのは、 $\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造が唯一でないのは $n = 4$ だけ、という数学の一点だけ。そして体系の規律——この驚きを「だから宇宙は4次元でなければならない」と証明にすり替えない。過剰決定は、必然の証明ではなく、驚くほど多くの独立な理由が同じ答えに集まる、その交差点の記述だ。4次元の秘密を、物理でなく数学で照らした巨匠に、静かな敬意を記す。

7. 射程／結論

示すこと：エキゾチック $\mathbb{R}^4$ —— $\mathbb{R}^n$ の滑らかな構造が唯一でないのは $n = 4$ だけ（2節）／それを暴いた道具＝ゲージ理論のインスタントン・自己双対性が効くのは4次元だけ（3節）／位相（フリードマン）と微分（ドナルドソン）は別根（4節）／論文69の過剰決定センサスに独立な根を一本追加＝J3（5節）。

示さないこと（禁欲）：「4次元でなければならない」の証明ではない（記述的な過剰決定・admire）／位相と微分を混同しない（別根）／数の4を体系の他の数と語呂合わせしない（94/101）／ $16\pi^2$ の同根性は主張しない（共鳴・非同一・48/70）／新しい数学・予言なし（第2層）・OSは第3層。

論文69は「なぜ3+1次元か」を過剰決定として描いた。本稿は、そこに4次元だけの微分構造の例外という、物理とは独立な深い根を一本足した。 $\mathbb{R}^n$ の滑らかさは $n \neq 4$ で唯一、 $n = 4$ でだけ非可算個——しかもそれを暴いた道具はゲージ理論のインスタントンで、体系のゲージ（96）・ホップ（67）・指数定理（70）と地続きだ。位相（フリードマン）と微分（ドナルドソン）は別根、そして4次元でだけ両者は劇的にずれる。本稿がしたのは、新しい主張ではなく、過剰決定センサス（J3）に独立な根を正しく加え、位相と微分を別根として分けたことである。4次元の秘密を数学で照らした巨匠に、105番目の番地を返す。

参考文献

1. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. J. Differential Geom. 18, 279.
2. Freedman, M. H. (1982). *The topology of four-dimensional manifolds*. J. Differential Geom. 17, 357.
3. Donaldson, S. K. & Kronheimer, P. B. (1990). *The Geometry of Four-Manifolds*. Oxford Univ. Press.
4. Gompf, R. & Stipsicz, A. (1999). *4-Manifolds and Kirby Calculus*. AMS.
5. Yamagishi, Y. (2026). *Why 3+1 Dimensions: an Overdetermination Census* [論文69]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21650011.

6. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle (Weyl)* [論文96]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21758671.
7. Yamagishi, Y. (2026). *Constants' Home: Index Theorem* [論文70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
8. Yamagishi, Y. (2026). *Ricci Flow (Hamilton–Perelman)* [論文103]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836801
9. Yamagishi, Y. (2026). *Clifford Algebra* [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)