境界から内部が決まるかは、何を何個測るかで決まる

— 三重対角行列は未知数 11 に対しスペクトルが 6 個で 5 足りず、規格化定数を足すとちょうど足りて元が戻る。同じ音の別の形は、聴く作用素を替えると見分けられる。境界の応答は、内部に節点があるかどうかを見分けない — 分離子は、境界で何を何種類測るか — [論文1051]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

境界のデータから内部を読む問いは、体系にいくつも現れてきた。散乱、境界値、スペクトル——どれも「少ない情報が構造を決める」に見える。本稿が問うのは、どれだけ測れば足りるのかである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。足りるかどうかは個数で書ける——大きさ 6 の三重対角行列の未知数は対角 6 と副対角 5 で 11 個だが、固有値は 6 個しかない。5 個足りない（第2節）。 第二に、足りないことは、実際に別のものを作って確かめられる——固有値をそのままに、固有ベクトルの端の値だけを替えると、固有値の差が 1.554×10^{-15} のまま、行列そのものは最大 2.238686 違う別物になる（第2節）。 第三に、規格化定数を足すと、ちょうど足りる——固有値 6 個に端の値の二乗 6 個を足すと、和が 1 という制約で独立なのは 11 個になり、未知数と同じ数になる。実際に組み立て直すと元の行列が差 6.883×10^{-15} で戻る（第3節）。 第四に、同じ音の別の形は、聴く作用素を替えると見分けられる——四角形と孤立点の組と、星形は、隣接行列のスペクトルが同じである（差 6.939×10^{-18}）。ところがラプラシアンで聴くと、スペクトルは最大 1.000000 違う（第4節）。 第五に、境界は、内部に節点があるかどうかを見分けない——伝導率 1・2・3 の星形と、そこから出る三角形 0.333333・0.500000・1.000000 は、境界から見た応答が差 2.220×10^{-16} で一致する。形を決めれば伝導率は一意に戻る（差 4.441×10^{-16}）ので、決まらないのは値ではなく形である（第5節）。 第六に、三つの場は一つの表に並ぶ——未知数とデータの個数を並べると、足りない・ちょうど・余るの三通りに分かれる。分離子は、境界で何を何種類測るかである（第6節）。 キーワード：逆問題、一意性、スペクトル、三重対角行列、境界値問題、抵抗網。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——三重対角行列をスペクトルと規格化定数から組み立て直せること（ゲルファント＝レヴィタン 1951、ド・ブーア＝ゴラブ 1978）、同じスペクトルを持つ非同型なグラフがあること、二次元の太鼓で同じ音の別の形があること（ゴードン＝ウェッブ＝ウォルパート 1992）、境界の応答が内部の伝導率を決めること（カルデロン 1980）は、いずれも既知である。カルデロン問題を解いたとは言わない——本稿が計算するのは有限個の節点の網であり、連続体の定理は引くだけである。悪条件性を論じない——一意に決まっても復元が不安定でありうることは、論文99 が扱っている。ここで数えるのは個数の釣り合いだけである。逆固有値問題が新しいとは言わない——スペクトルと規格化定数から三重対角行列が戻ることは標準の結果で、本稿はそれを個数の釣り合いとして読み直すだけである。二次元の太鼓の固有値は計算していない——同じ音の別の形の例としては、固有値を厳密に書き下せるグラフを使った。太鼓の反例は引くだけである。同じ音の別の形が一般にどれだけ在るかは数えない——例を一組だけ出す。聴けば分かるとも、聴いても分からないとも一般化しない——どちらになるかは、どの作用素で何個測るかに依るというのが結論である。既刊との関係：論文89 は、散乱の逆問題という構えに名を与えた——ここで組み立て直す三重対角行列は、その構えの離散版である。論文99 は、境界のデータから内部が一意に決まることを示した——ここでは、その一意性が成り立つのは形を先に決めたあとだと数える。論文102 は、逆問題の族を散乱・境界値・スペクトルに仕分けた——ここではその三つを同じ物差し（未知数とデータの個数）に載せる。論文100 は、逆問題の一意性が別の根であることを書いた——ここではその根の中身を、足りる・足りないの数として出す。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した——三つの場を同じ判定に掛けたが、同じ数が出たわけではない。論文1050 は、必然の根が四つでは足りないことを数え、逆問題をその族の一つとして並べた——ここではその族の中身を数える。加えたのは、足りるかどうかを未知数とデータの個数の差として書いたこと、足りないことを、固有値を保ったまま別の行列を実際に作って示したこと、規格化定数を足すとちょうど足りることを、組み立て直して確かめたこと、同じ音の別の形が、聴く作用素を替えると見分けられることを数で示したこと、境界が内部の節点の有無を見分けないことを、応答の一致として示したことである。

1. 記法と問い

設定：内部に知りたいものがあり、外から測れるのは境界の応答だけだとする。このとき「内部は決まるか」と問う。本稿は、決まるか決まらないかを個数で見る——内部を書き表すのに必要な数（未知数）と、境界から得られる独立な数（データ）を並べる。

問い：どれだけ測れば足りるのか。「境界データ」という一つの語が、個数の違うデータの集まりを指していることを見る。

三つの場を選んだ：三重対角行列（散乱の逆問題の離散版）、グラフ（形を聴く）、抵抗網（境界値の逆問題）である。どれも有限で、最後まで数が出る。

2. 三重対角行列：足りない分は $n-1$ である

大きさ n の対称な三重対角行列を考える。対角に n 個、副対角に $n-1$ 個の数があるので、未知数は $2n-1$ 個である。$n=6$ なら 11 個になる。

一方、固有値は n 個しかない。6 個である。差は $2n-1-n=n-1$ で、5 個足りない。n を 3・6・10・25 と変えても、不足はつねに $n-1$ である。

足りないことは、実際に別のものを作って示せる。対角 $(2,-1,0.5,3,-2.5,1.5)$・副対角 $(1,0.8,1.3,0.6,0.9)$ の行列から出発し、固有値をそのままに、固有ベクトルの第一成分の二乗（規格化定数）だけを別の組に取り替えて組み立て直す。

結果：固有値の差は 1.554×10^{-15} で同じままだが、行列そのものは最大 2.238686 違う。内訳は対角が 2.238686、副対角が 1.258821 で、どちらも動いている。つまり同じ音を出す別の行列がある。

3. 規格化定数を足すと、ちょうど足りる

足すデータは、固有ベクトルの第一成分の二乗である。n 個あるが、総和が 1 という制約が一本あるので独立なのは $n-1$ 個になる。固有値 n 個と合わせて $2n-1$ 個——未知数とちょうど同じ数である。

実際に組み立て直すと、元の行列が戻る。対角化した行列にランチョス法を掛け、出発ベクトルを規格化定数の平方根に取ると、差は 6.883×10^{-15} である。規格化定数を替えなければ何度やっても同じ行列が戻るので、この一致は偶然ではない。

ここが境目である：n 個では足りず、$2n-1$ 個でちょうど足りる。多すぎも少なすぎもしない。

4. 同じ音の別の形——ただし、聴く作用素に依る

形を音から読む側に移る。頂点 5 の二つのグラフを並べる：一つは四角形と孤立点、もう一つは中心から 4 本出た星形である。辺はどちらも 4 本だが、次数の並びは $(0,2,2,2,2)$ と $(1,1,1,1,4)$ で違うので、同じ形ではない。

隣接行列のスペクトルを取ると、どちらも $-2,0,0,0,2$ で、差は 6.939×10^{-18} である。同じ音である。

ところがラプラシアン行列で聴くと、四角形と孤立点は $0,0,2,2,4$、星形は $0,1,1,1,5$ になり、最大 1.000000 違う。別の音である。どちらも最小固有値は 0 で、その点では揃っている。

同じ二つの形が、聴く作用素を替えると「同じ音」から「別の音」に変わる。だから「形は聴けない」という言い方は、何を聴くかを決めてからでなければ成り立たない。⚠ 二次元の太鼓にも同じ音の別の形があることは知られているが（ゴードン＝ウェッブ＝ウォルパート 1992）、本稿はその固有値を計算していない。

5. 境界は、内部に節点があるかどうかを見分けない

抵抗の網を考える。端子が **3** つあり、その内側に節点が一つあって、三本の枝が伝導率 **1・2・3** で結んでいるとする（星形）。端子の電位から端子の電流を与える写像（境界から見た応答）を作ると、内部の節点は消去できる。

消去して出るのは、端子どうしを直接つなぐ三角形である：伝導率は **0.333333・0.500000・1.000000** になる。星形の応答と三角形の応答の差は **2.220×10^{-16}** で、一致している。どちらの応答も各行の和が **0** になり、電流が保存している。

節点の数は **4** と **3** で違うのに、境界からは同じに見える。つまり境界は、内部に節点があるかどうかを見分けない。

ただし、形を先に決めれば値は決まる。星形だと決めてよいなら、応答の非対角の三つから伝導率が一意に戻る——差 **4.441×10^{-16}** で **1・2・3** に戻る。三角形の応答から出発しても同じ値が戻る（これが見分けられないことの証拠である）。別の星形（**1・2・5**）から出発すれば別の値が戻るので、この復元は空回りしていない。

決まらないのは値ではなく、形のほうである。

6. 三つの場を一つの表に並べる

測るもの	未知数	データ	結果
三重対角行列・スペクトルだけ	11	6	5 足りない
三重対角行列・スペクトルと規格化定数	11	11	ちょうど足りる
抵抗網・端子 3 の星形	3	3	ちょうど足りる
抵抗網・端子 4 の星形	4	6	余る

端子を増やすと釣り合いが変わる：端子 **3** では未知数 **3**・データ **3** でちょうど、端子 **4** では **4** 対 **6**、端子 **5** では **5** 対 **10** で、余る側に振れていく。端子 **4** の星形の応答の階数は **3** で、全体の電位をずらしても電流が変わらないぶん一つ落ちている。

⚠ この表は個数の釣り合いだけを見ている。個数が足りていても復元が不安定でありうることは別の話で、ここでは扱わない。

7. 点呼と結び

結び：境界から内部が決まるかは、何を何個測るかで決まる。大きさ 6 の三重対角行列の未知数は 11 個なのに固有値は 6 個しかなく、5 個足りない——実際、固有値を保ったまま端の値だけを替えると、固有値の差が 1.554×10^{-15} のまま行列は最大 2.238686 違う別物になる。規格化定数を足すとちょうど足りる——総和が 1 という制約を引いて 11 個になり、組み立て直すと元の行列が差 6.883×10^{-15} で戻る。同じ音の別の形は、聴く作用素を替えると見分けられる——四角形と孤立点の組と星形は、隣接行列では差 6.939×10^{-18} で同じ音だが、ラプラシアンでは最大 1.000000 違う。境界は、内部に節点があるかどうかを見分けない——伝導率 1・2・3 の星形と三角形 0.333333・0.500000・1.000000 の応答は差 2.220×10^{-16} で一致し、形を決めれば値は差 4.441×10^{-16} で戻る。決まらないのは値ではなく形である。分離子は、境界で何を何種類測るかである——同じ「境界データ」という語が、個数の違うデータの集まりを指している。正直に書けば——本稿が数えたのは個数の釣り合いだけで、足りていても復元が不安定でありうることには触れていない。加えたのは——足りるかどうかを未知数とデータの個数の差として書いたこと、足りないことを別の行列を実際に作って示したこと、ちょうど足りることを組み立て直して確かめたこと、同じ音の別の形が作用素を替えると見分けられることを数で示したこと、境界が内部の節点の有無を見分けないことを応答の一致として示したことである。

参考文献

1. Borg, G. (1946). Eine Umkehrung der Sturm--Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. *Acta Mathematica*.
2. Calderón, A. P. (1980). On an inverse boundary value problem. *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*.
3. de Boor, C., & Golub, G. H. (1978). The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data. *Linear Algebra and its Applications*.
4. Gelfand, I. M., & Levitan, B. M. (1951). On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*.
5. Gordon, C., Webb, D. L., & Wolpert, S. (1992). One cannot hear the shape of a drum. *Bulletin of the American Mathematical Society*.
6. Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*.
7. 山岸勇輝 (2026).『ゼロテンションと逆問題』[論文89]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21748664
8. 山岸勇輝 (2026).『境界から内部を読む』[論文99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
9. 山岸勇輝 (2026).『王道の交差』[論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
10. 山岸勇輝 (2026).『スペクトルから形を聴く』[論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
11. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
12. 山岸勇輝 (2026).『必然の根は四つでは足りず、六つでも足りない』[論文1050]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22903463

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)