

「一つ減る」は二つあり、片方は穴を数え、片方は次元を数える

— 一列の仕切りが中身より一つ少ないのはオイラー標数のため、輪にすれば 0、8 の字なら -1 になる。殻の指数が次元より一つ小さいのは余次元のため、球でも輪環でも二つ穴でも 2.000000000 のまま動かない。余次元 1 はどちらにも成り立つのに、片方の数を決めていない — 分離子は、位相を変えたときに動くかどうか — [論文1052]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

三重対角行列の副対角は $n-1$ 個であり、 d 次元で殻の質量が半径によらない指数は $d-1$ である。どちらも「一つ減る」に見える。本稿が問うのは、この二つが同じ源を持つかである。新しい定理も法則も主張しない。第一に、これが本稿の芯である。二つは別の源を持つ——片方の 1 はオイラー標数、つまり穴の数であり、もう片方の 1 は余次元、つまり面が中身より一つ低いことである（第5節）。第二に、余次元だけでは「一つ少ない」は出ない——どの次元の格子でも仕切りは余次元 1 だが、数が「まず引く 1」になるのは一次元だけである。二次元の 3 かける 3 はまず 9 に対し仕切り 12 で、8 ではない。三次元の 3 かける 3 かける 3 はまず 27 に対し仕切り 54 である（第2節）。第三に、一列の 1 の正体はオイラー標数である——辺は頂点からオイラー標数を引いた数に等しい。木なら 1、輪なら 0、8 の字なら -1、輪が三つなら -2 で、引く数そのものが動く。行列に直すと、固有値だけでは足りない分は辺の数に等しく、一列で 5、輪で 6 である（第3節）。第四に、殻の指数は位相にまったく反応しない——球（オイラー標数 2）、立方体、直方体、輪環（0）、二つ穴の輪環（-2）のいずれでも、面の指数は 2.000000000 のまま動かない。動かすのは次元だけで、次元を 2 から 6 ままで変えると指数は $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ と動く（第4節）。第五に、二つは逆向きに盲目である——一列の 1 は位相を見て次元を見ず、殻の 1 は次元を見て位相を見ない。論文86 の札でいえば、前者は位相的必然、後者は次元的一意性で、四つの根のうち別の二つに入る（第5節）。第六に、数が一致するのは偶然である—— $n-1$ と $d-1$ が同じ値になるのは点の数と次元が等しいときだけで、体系に実際に現れた二つは 5 と 2 である。分離子は、位相を変えたときに動くかどうかである（第6節）。キーワード：オイラー標数、余次元、別根、次元解析、グラフ、球殻。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——グラフの辺と頂点とオイラー標数の関係、格子の面の数え上げ、自己相似な曲面の面積が長さの $d-1$ 乗で増えること、球対称の殻の質量が半径によらない条件は、いずれも既知である。「余次元 1 の境界」という見立てを誤りとは言わない——一列の仕切りも球面も、どちらも余次元 1 である。本稿が言うのは、それだけでは数が決まらないということだけである。一般の複体で統一しない——扱うのはグラフと格子と自己相似な曲面の三つで、任意の次元の複体に一般化しない。永久に別だとは言わない——論文300 の判定は、今ある測り方で応答が違うという意味である。将来もっと深い所で繋がる可能性は否定しない。二つ穴の輪環の面積は仮に置いた——自己相似に大きくする族として係数だけを与えたもので、実在の曲面の面積を計算したのではない。位相を変えても指数が動かないことを見るための例である。物理の主張をしない——殻の質量の話は幾何の計算であり、どんな星やどんな物質の話でもない。既刊との関係：論文300 は、同根か別根かは判定できると示した——ここで使うのはその基準で、数の一致だけでは同根と見なさず、何を動かすと動くかを見る。論文1051 は、三重対角行列の未知数が $2n-1$ 個であることを数えた——その $n-1$ の出どころを、ここで調べる。論文01 は、三次元で殻の質量が半径によらない指数が 2 だけ一つであることを示した——その 2 が $d-1$ であることの出どころを、ここで調べる。論文116 は、分母にあった指数が $d-1$ であることを示した——ここではその $d-1$ が位相に反応しないことを数える。論文224 は、多面体の角の欠損を全部足すと 4 パイになり、輪環では 0 になることを示した——オイラー標数が値を決める例として引く。論文86 は、決まっている理由を四つに分けた——ここで出た二つは、その四つのうち別々の札に入る。論文1050 は、四つの札では足りないことを数えた——足りない側の話ではなく、札が実際に働く例をここで一つ出す。加えたのは、余次元 1 が二つに共通しながら片方の数を決めていないことを、格子の数え上げで示したこと、一列の 1 がオイラー標数であることを、輪と 8 の字で 1 が 0 と -1 に動くことで示したこと、殻の指数が位相にまったく反応しないことを、オイラー標数 $2 \cdot 0 \cdot -2$ の三つで示したこと、二つが逆向きに盲目であることを一つの表に並べたことである。

1. 記法と問い

設定：体系に「一つ減る」が二か所ある。

A：対称な三重対角行列の未知数は、対角に n 個、副対角に $n-1$ 個である。一列に並んだ n 個の点をつなぐ線が $n-1$ 本だからである。

B： d 次元で、球殻の質量が半径によらないための密度の指数は $d-1$ である。三次元なら 2 で、これが論文01 の唯一性である。

問い：この二つは同じ源を持つか。寄せられた見立ては「どちらも余次元 1 の境界だから同じである」というものだった——中身が n 個あれば、あいだを取り持つ皮はいつも一つ少ない、という読みである。

判定は論文300 の基準に従う：数が一致するだけでは同根としない。何を動かすと動くかを見て、応答が違えば別根とする。動かすものを三つ用意した——位相、形、次元である。

2. 余次元だけでは「一つ少ない」は出ない

まず、見立てを正面から試す。 d 次元の格子を取り、一辺に m 個のますを並べる。ますは m^d 個、内側の仕切りは $dm^{d-1}(m-1)$ 個である。どの仕切りも、ますより一つ低い次元の面である——つまり、どれも余次元 1 である。

次元	一辺	ます	仕切り	ます引く 1 と比べて
1	3	3	2	ちょうど
1	10	10	9	ちょうど
2	3	9	12	4 多い
2	4	16	24	9 多い
3	3	27	54	28 多い
3	4	64	144	81 多い

二次元の 3 かける 3 では、ますが 9、仕切りが 12 で、「ます引く 1」の 8 ではない。三次元の 3 かける 3 かける 3 では、ますが 27 に対し仕切りが 54 である。

余次元 1 はどの次元でも成り立っているのに、「一つ少ない」は一次元でしか成り立たない。したがって、「一つ少ない」を出しているのは余次元ではない。

3. 一列の 1 の正体はオイラー標数である

では何が出しているのか。グラフで測る。頂点の数を V 、辺の数を E とすると、オイラー標数は $\chi = V - E$ で、辺は $E = V - \chi$ と書ける。

形	頂点	辺	オイラー標数
一列（道）	6	5	1
枝分かれのある木	7	6	1
星形の木	5	4	1
輪	6	6	0
輪が二つ（8の字）	5	6	-1
輪が三つ	4	6	-2

引く数そのものが $1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot -2$ と動いている。 1 であるのは木のときだけで、枝分かれしていても星形でも、木でありさえすれば 1 である。つまり一列であることは効いていない——効いているのは輪が無いことである。

行列に直すと、こうなる。未知数は対角 V 個と非対角 E 個で $V + E$ 、固有値は V 個しかないので、足りない分は E に等しい。一列なら **5**、輪にすると **6** である。輪では「一つ少ない」が消える。

4. 殻の指数は位相にまったく反応しない

B の側を同じように動かす。自己相似に大きくする曲面を並べ、長さを **10** 倍したときに面積が何倍になるから指数を読む。

形	オイラー標数	面の指数
球	2	2.000000000
立方体	2	2.000000000
直方体（1対2対3）	2	2.000000000
輪環	0	2.000000000
二つ穴の輪環	-2	2.000000000

オイラー標数は $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0 \cdot -2$ と動いているのに、指数は **2.000000000** のまま一つも動かない。△ 二つ穴の輪環の面積は、自己相似に大きくする族として係数だけを仮に置いたものである——実在の曲面の面積を計算したのではなく、位相を変えても指数が動かないことを見るための例である。

動かすのは次元だけである。 d を2から6まで変えると、面の指数は $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ と動く。体積の指数はつねにその1大きい値である。この1こそが余次元である——面は中身より一つ低い。

5. 二つを並べる

動かすもの	A（一列の辺の数の1）	B（面の指数の1）
位相を変える	1から0、-1、-2へ（動く）	2のまま（動かない）
形を変える	木ならどれも1（動かない）	立方体でも2（動かない）
次元を変える	仕切りはます引く1でなくなる	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ （動く）

応答がまったく違う。Aは位相を見て次元を見ず、Bは次元を見て位相を見ない——二つは逆向きに盲目である。論文300の基準では、これは別根である。

論文86の札に当てると、Aは位相的必然、Bは次元的一意性で、四つの根のうち別々の二つに入る。論文224が示した、多面体の角の欠損を全部足すと 4π になり輪環では0になるという事実は、Aと同じ側にある——そこでも値を決めているのはオイラー標数である。

見立てが誤っていたわけではない。一列の仕切りも球面も、たしかにどちらも余次元1である。ただし余次元1であることは、数を決めていない——二次元の格子でも仕切りは余次元1なのに、数は「ます引く1」にならないからである。

6. 数が一致するのはいつか

最後に、二つの数がそもそもどれくらい一致するのかを見ておく。 $n-1$ と $d-1$ が同じ値になるのは、点の数 n と次元 d が等しいときだけである。

体系に実際に現れた二つを並べると、論文1051の三重対角行列は $n=6$ で不足が5、論文01の殻は $d=3$ で指数が2である。値そのものが違う。似て見えたのは値ではなく、「一つ引く」という書き方のほうであった。

7. 点呼と結び

結び：「一つ減る」は二つあり、片方は穴を数え、片方は次元を数える。余次元1は二つに共通しているが、片方の数を決めていない——どの次元の格子でも仕切りは余次元1なのに、数が「ます引く1」になるのは一次元だけで、二次元の3かける3はます9に対し仕切り12である。一列の1の正体はオイラー標数である——辺は頂点からオイラー標数を引いた数で、木なら1、輪なら0、8の字なら-1、輪が三つなら-2と、引く数そのも

のが動く。行列の不足は一行で 5、輪で 6 になる。殻の指数は位相にまったく反応しない——オイラー標数が $2 \cdot 0 \cdot -2$ と動いても、面の指数は **2.000000000** のまま動かない。動かすのは次元だけで、次元を 2 から 6 まで変えると $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ と動く。二つは逆向きに盲目である——一行の 1 は位相を見て次元を見ず、殻の 1 は次元を見て位相を見ない。論文86 の札でいえば、前者は位相的必然、後者は次元的一意性で、四つの根のうち別々の二つに入る。分離子は、位相を変えたときに動くかどうかである——同じ「一つ引く」という書き方の下で、輪にすると動くほうと、二つ穴にしても動かないほうに分かれる。正直に書けば——どちらも余次元 1 であること自体は正しく、本稿が言うのはそれだけでは数が決まらないということである。また、今ある測り方で応答が違うという意味であって、永久の分離を主張するものではない。加えたのは——余次元 1 が片方の数を決めていないことを格子の数え上げで示したこと、一行の 1 がオイラー標数であることを輪と 8 の字で示したこと、殻の指数が位相に反応しないことをオイラー標数 $2 \cdot 0 \cdot -2$ で示したこと、二つが逆向きに盲目であることを一つの表に並べたことである。

参考文献

1. Euler, L. (1758). *Elementa doctrinae solidorum. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.*
2. 山岸勇輝 (2026). 『球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理』 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
3. 山岸勇輝 (2026). 『必然性の四つの根』 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
4. 山岸勇輝 (2026). 『 $\mathbf{c}$ の冪は、何を数えているか』 [論文116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794
5. 山岸勇輝 (2026). 『どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である』 [論文224]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120836
6. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
7. 山岸勇輝 (2026). 『必然の根は四つでは足りず、六つでも足りない』 [論文1050]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22903463
8. 山岸勇輝 (2026). 『境界から内部が決まるかは、何を何個測るかで決まる』 [論文1051]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22903544

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)