「拡大しても同じ」を一つの倍率に弱めると、指数の唯一性は失われる

— どんな倍率でも成り立てと言えば解は冪ひとつで指数は一意に決まるが、倍率を一つに限ると対数の周期関数を掛けたものがすべて通り、無限に残る。そこで一つに決まるのは指数ではなく比のほうである — 分離子は、拡大の倍率が連続か、一つだけか — [論文1053]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

「スケールを持たないことを要求すると、指数が一意に決まる」という形は、体系に何度も現れてきた。本稿が問うのは、その要求を弱めたら何が残るのかである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。要求の強さで答えが変わる——どんな倍率でも成り立てと言えば解は冪だけで、指数は一意に決まる。ところが倍率を一つに限ると、冪に対数の周期関数を掛けたものがすべて通り、解は無限にある（第2節・第3節）。 第二に、連続の側は実際に一つである——殻の質量が半径によらない指数を 0 から 6 まで 0.1 刻みで探すと、残るのは 2 次元で 1.0、3 次元で 2.0、4 次元で 3.0 のちょうど一つずつである。冪はどの倍率でも相対誤差 1.371×10^{-16} で通る（第2節）。 第三に、離散の側は無限である——倍率を一つに固定すると、掛ける周期関数の振幅を 0 から 0.9 まで変えても、周期の数を 1 倍 2 倍 3 倍にしても、相対誤差は 1e-15 以下で全部通る。同じものを別の倍率 2 で試すと 0.529710 で通らない（第3節）。 第四に、では離散の側で何が一つに決まるのか——指数ではなく、比のほうである——ペンローズのタイルの置換行列（跡 3・行列式 1）の固有値は 2.618033989 と 0.381966011 で、二種類のタイルの個数の比は出発点を六通りに変えても 1.618033989 に落ちる。比 1 を入れると一回で 1.500000000 に動く（第4節）。 第五に、全方向の平均を真似る力は、五回対称のほうが強い——有限個の方向で立体角全体の平均をどこまで再現できるかを測ると、正二十面体は 12 点で強さ 5、立方体は 8 点で強さ 3 である。四次の平均は厳密が 0.2 のところ、立方体が 0.111111111111、正二十面体が 0.200000000000 である（第5節）。 第六に、二つの一意性は別の根から来る——殻の指数は次元で動き、タイルの比は置換規則で動く。置換規則を替えると比は 1.618033989 のまま固有値だけが変わる。分離子は、拡大の倍率が連続か、一つだけかである（第6節）。 キーワード：スケール不変性、一意性、ペロン＝フロベニウス、準結晶、球面デザイン、別根。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——連続なスケール不変性が冪を強いること、離散なスケール不変性が対数周期の因子を許すこと、非負行列の最大固有値と固有ベクトルが一意であること（ペロンとフロベニウス）、ペンローズのタイルの膨張、正二十面体の頂点が球面デザインとして強さ 5 であること、格子と両立する回転が五種類に限ること（結晶学的制限）は、いずれも既知である。4π が式に現れるとは言わない——ここで 4π が果たすのは、全方向にわたる平均という基準の役だけである。有限個の方向がその平均をどこまで真似られるかを測るのに使い、タイルの側の式に 4π が出てくるわけではない。論文117 を誤りとは言わない——117 は連続な要求の場合を四つの別根に分けた。本稿が足すのは、要求を離散に弱めた場合である。論文269 と同じことを言わない——269 は何が五回対称を禁じているかを示した。本稿が足すのは、なぜ五回対称が欲しくなるのかという側、すなわち全方向の平均を真似る力である。準結晶の物理を論じない——回折の像も、実在の物質の安定性も、扱わない。ペンローズのタイルの分類を主張しない——使うのは置換規則から出る行列一つで、タイルの種類や貼り合わせの規則の全体は扱わない。対数周期の因子が実在の系で見えるとは言わない——本稿が示すのは、離散な要求では解が絞りきれないという数学の事実だけである。五回対称が最良だとは言わない——正二十面体も正十二面体もどちらも強さ 5 で、点の数だけが違う。それ以上の最適性は測っていない。既刊との関係：論文117 は、スケールを持たないことを要求すると指数が一意に決まるという形を、恒等式と次元行列と経験と不動点の四つに分けた——ここでは五つ目を足すのではなく、四つとも前提にしていた連続性を外すと何が起きるかを数える。論文01 は、三次元で殻の質量が半径によらない指数が 2 ただ一つであることを示した——本稿はそれを連続な要求の代表例として再現し、離散の側と並べる。論文269 は、結晶が禁じているのは対称性ではなく周期性であることを示し、五回対称が返す値が黄金比の逆数であることを書いた——本稿はその値を別の役で使う。あちらは禁じられる理由、こちらはタイルの個数の比である。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した——その基準で二つの一意性を比べ、応答が違うことを確かめる。論文86 は、決まっている理由を四つに分けた——ここで出る二つの一意性は、その札で読むと別の場所に入る。論文1052 は、似た形の二つが位相と次元に分かれることを示した——本稿も同じ判定を当てるが、分かれる先は次元と置換規則である。加えたのは、要求を連続から離散に弱めると指数の唯一性が失われることを、周期関数の振幅と周期の数を振って数で示したこと、離散の側で一意なのが指数ではなく比であることを、出発点を六通りに変えて確かめたこと、全方向の平均を真似る力を五回対称と四回対称で比べたこと、二つの一意性が何で動くかを並べて別根と判定したことである。

1. 記法と問い

設定：ある量 $f(r)$ が「拡大しても同じ形」であるとは、倍率 λ をかけたときに

$$f(\lambda r) = \lambda^{\alpha} f(r)$$

が成り立つことをいう。ここで効くのは、この式をどの λ について要求するかである。

問い：すべての λ で要求するのと、ある一つの λ でだけ要求するのとでは、残る f がどう変わるか。

体系はこの形を何度も見てきた。論文117は「スケールを持たないことを要求すると指数が一意に決まる」を四つの別根に分けた。その四つはいずれも、上の式をすべての λ で要求している。本稿は要求を弱める。

2. 連続な要求：解は冪ひとつで、指数は一つに決まる

まず、要求を強いままにする。$f(r) = r^{a}$ を取り、$\lambda = 1.3 \cdot 2.0 \cdot 2.618033989 \cdot 7.5$ で試すと、相対誤差は最大 1.371×10^{-16} である。どの倍率でも厳密に通る。

そして指数のほうは一つに決まる。論文01の場合で確かめる：密度を r^{-p} と置いたとき、殻の質量 dm/dr が半径によらないための p を、0から6まで0.1刻みで全部試す。

次元	残った指数	個数
2	1.0	1
3	2.0	1
4	3.0	1

どの次元でも、残るのはちょうど一つである（$d-1$）。これが連続な要求の姿である——候補を全部並べても、生き残るのは一点しかない。

3. 離散な要求：解は無限に残る

次に要求を弱める。倍率を一つ、$\lambda_0 = 2.618033989$ に固定し、その倍率のときだけ成り立てと要求する。

このとき、冪に対数の周期関数を掛けたものが通る：

$$f(r) = r^{a}\left(1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi \ln r}{\ln \lambda_0}\right).$$

$\ln r$ が $\ln \lambda_0$ だけ増えると余弦は一周して元に戻るので、掛けた因子は $r \to \lambda_0 r$ で変わらない。

数で確かめる。振幅 ε を $0.0 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.9$ と変えても、周期の数を1倍・2倍・3倍にしても、λ_0 での相対誤差は 10^{-15} 以下で、全部通る。$\varepsilon = 0.3$ のときで 3.875×10^{-16} である。

一方、同じ f を別の倍率 $\lambda = 2$ で試すと、相対誤差は 0.529710 になり、通らない。つまりこの f は、ちょうど λ_0 という一つの倍率にだけ合わせて作られている。

⇒ 要求を一つの倍率に弱めた瞬間、指数の唯一性は失われる。振幅も周期の数も自由に選べるので、解は無限にある。

4. では、離散の側で何が一つに決まるのか

失われたのは指数の一意性であって、一意性そのものではない。離散な拡大の代表例で、何が一つに決まるかを見る。

ペンローズのタイルは、二種類の菱形（ここではカイトとダートと呼ぶ）でできていて、膨張という操作で自分自身に写る：カイトはカイト 2 枚とダート 1 枚に、ダートはカイト 1 枚とダート 1 枚に置き換わる。これを行列で書くと

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} M = 3, \qquad \det M = 1.$$

固有値は **2.618033989** と **0.381966011** で、積は 1、和は 3 である。大きいほうは黄金比 φ の二乗そのもので、差は 0 である。行列式が 1 なのは、膨張が枚数の勘定を保つことに対応する。

そして二種類のタイルの個数の比は、一つに決まる：

はじめの枚数（カイト, ダート）	落ち着く比
(1, 0)	1.618033989
(0, 1)	1.618033989
(1, 1)	1.618033989
(1, 1000)	1.618033989
(1000, 1)	1.618033989
(7, 3)	1.618033989

六通りのどこから始めても **1.618033989** に落ち、互いの差は 0 である。非負の行列の最大固有値とその固有ベクトルが一意であること（ペロンとフロベニウス）が、これを保証している。比 1 を入れると一回で **1.500000000** に動くので、動かないのは φ だけである。

⇒ 論文01 では指数が一つに決まり、ここでは比が一つに決まる。一意性は失われていない。一つに決まっている対象が違うのである。

5. 全方向の平均を、有限の方向でどこまで真似られるか

ここで、なぜ五回対称が現れるのかに触れておく。立体角の総量 4π とは、全方向にわたる平均のことである。有限個の方向だけを使って、その平均をどこまで正確に再現できるか——単項式の次数 t まで厳密に再現でき

るとき、その点の集まりを強さ t と呼ぶ。

立体	対称	点の数	強さ
正八面体	四回	6	3
立方体	四回	8	3
正二十面体	五回	12	5

どこで分かれるかは四次の平均を見れば分かる：厳密値は 0.2 で、立方体は **0.111111111111**（差 **0.088889**）、正二十面体は **0.200000000000** である。二次まではどちらも完全に一致する。四次で分かれる。

ところが、その五回対称は格子と両立しない。論文269 は、格子と両立する n 回回転が $2\cos(2\pi/n)$ が整数であるものに限ることを示した——1 から 49 まで試すと、許されるのは $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ の五つだけで、$n = 5$ は 0.618033989 を返して弾かれる。

⇒ 全方向の平均をうまく真似る対称性ほど、周期的な格子からは締め出される。五回対称を取るなら、周期性を手放すしかない。そこに残るのが、離散な拡大だけを持つ図形である。

6. 二つの一意性は、別の根から来る

最後に、論文300 の基準で二つを比べる——数が一致するかではなく、何を動かすと動くかを見る。

動かすもの	殻の指数	タイルの比
次元を変える	1, 2, 3 と動く	動かない
置換規則を変える	変えようがない	固有値が 2.618033989 から 1.618033989 へ

置換規則を $[[1,1],[1,0]]$ に取り替えると、最大固有値は **1.618033989** になる。次元は一切効かない。逆に殻の指数は次元だけで決まり、置換規則という概念がそもそも無い。

⇒ 別根である。論文86 の札で読めば、殻の側は次元的一意性、タイルの側は代数的必然（行列の固有値）で、別々の場所に入る。論文1052 が位相と次元に分けたのと同じ判定を当てたが、分かれる先が違う。

⚠ 二つに同じ数（φ の値）が出るが、役が違う。論文269 ではそれは禁じられる理由として現れ、ここではタイルの個数の比として現れる。同じ数を同じものと見なさない。

7. 点呼と結び

結び：「拡大しても同じ」を一つの倍率に弱めると、指数の唯一性は失われる。どんな倍率でも成り立てと要求すれば、解は冪だけで指数は一意に決まる——殻の質量が半径によらない指数を 0 から 6 まで 0.1 刻みで探すと、2 次元で 1.0、3 次元で 2.0、4 次元で 3.0 のちょうど一つずつしか残らず、冪はどの倍率でも相対誤差 1.371×10^{-16} で通る。倍率を一つに限ると、解は無限に残る——冪に対数の周期関数を掛けたものが、振幅を 0 から 0.9 まで変えても周期の数を 3 倍にしても相対誤差 1e-15 以下で全部通り、別の倍率 2 で試すと 0.529710 で通らない。では離散の側で一つに決まるのは指数ではなく比のほうである——置換行列（跡 3・行列式 1）の固有値は 2.618033989 と 0.381966011 で、タイルの個数の比は出発点を六通りに変えてもすべて 1.618033989 に落ち、比 1 を入れると一回で 1.500000000 に動く。全方向の平均を真似る力は五回対称のほうが強い——正二十面体は 12 点で強さ 5、立方体は 8 点で強さ 3 で、四次の平均は厳密 0.2 に対し 0.111111111111 と 0.200000000000 に分かれる。そしてその五回対称は格子と両立しない。分離子は、拡大の倍率が連続か、一つだけかである——同じ「拡大しても同じ」という言い方の下で、指数が一つに決まる側と、無限に残る側に分かれる。正直に書けば——4π はここで式に現れてはいない。全方向の平均という基準の役を果たしているだけである。また、対数の周期の因子が実在の系で見えるかどうかは論じていない。加えたのは——要求を連続から離散に弱めると指数の唯一性が失われることを振幅と周期の数を振って示したこと、離散の側で一意なのが比であることを出発点六通りで確かめたこと、全方向の平均を真似る力を五回対称と四回対称で比べたこと、二つの一意性が何で動くかを並べて別根と判定したことである。

参考文献

1. Frobenius, G. (1912). Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*.
2. Penrose, R. (1974). The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*.
3. Perron, O. (1907). Zur Theorie der Matrices. *Mathematische Annalen*.
4. Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., & Cahn, J. W. (1984). Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*.
5. 山岸勇輝 (2026).『球対称密度分布における $n=2$ の唯一性定理』[論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
6. 山岸勇輝 (2026).『必然性の四つの根』[論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
7. 山岸勇輝 (2026).『スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ』[論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
8. 山岸勇輝 (2026).『結晶が禁じているのは対称性ではなく、周期性である』[論文269]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169855
9. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
10. 山岸勇輝 (2026).『「一つ減る」は二つあり、片方は穴を数え、片方は次元を数える』[論文1052]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22903834

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)