

Il y a deux sortes d'exactitude : l'une est fixée par les unités, l'autre n'est pas déplacée par une déformation continue

— La résistance de Hall quantique est le produit des deux, et la constante de structure fine ne peut être ni l'une ni l'autre, donc elle varie — le séparateur est de savoir si une grandeur a une dimension, est un entier, ou ni l'un ni l'autre — [Article 1058]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

L'Article 1056 et l'Article 1057 ont mesuré que la constante de structure fine ne bouge pas avec les unités mais bouge avec l'énergie, et pourquoi elle s'arrête à basse énergie. Pourquoi, alors, existe-t-il une grandeur construite à partir de la même charge et de la même constante de Planck qui ne bouge pas du tout ? Cet article répond à cela. Aucun théorème nouveau ni aucune loi nouvelle n'est revendiqué.

Premièrement, et c'est le cœur. Le mot exact fait deux travaux différents—l'un est qu'une définition des unités a fixé la valeur, l'autre qu'une déformation continue ne la déplace pas. Le premier n'est accessible qu'aux grandeurs ayant une dimension, le second n'arrive qu'aux entiers (sections 2 et 5).

Deuxièmement, une grandeur ayant une dimension peut être rendue exacte par définition—la constante de von Klitzing vaut **25812.807459** ohms, son inverse **3.874045865**×10⁻⁵ siemens, le quantum de flux **2.067833848**×10⁻¹⁵ weber, tout cela à partir des seules valeurs définies. Déplacer la constante de structure fine d'un relatif de 1×10⁻⁶ la change de **0.000**×10⁰ (section 2).

Troisièmement, la révision de 2019 a été un échange—la perméabilité du vide est retrouvée à partir de la constante de structure fine à un relatif de **5.718**×10⁻¹², et déplacer cette constante d'un relatif de 1×10⁻⁶ la déplace de **1.000**×10⁻⁶. L'écart à 4π×10⁻⁷ vaut **5.444**×10⁻¹⁰ avec la valeur recommandée CODATA 2018 et **1.320**×10⁻¹⁰ (**0.825** fois l'incertitude) avec CODATA 2022, et il bouge, jusque dans son signe, à chaque révision des valeurs recommandées—c'est le prix de cet échange (section 3).

Quatrièmement, une grandeur sans dimension ne peut pas être rendue exacte par définition—sur cinq choix d'échelle, la dispersion de l'inverse de la constante de structure fine est **0.000**×10⁰, tandis que le contrôle, la constante de von Klitzing, a une dispersion des rapports de **1.000**×10¹⁴ (section 4).

Cinquièmement, l'exactitude topologique n'est pas la fixation d'une valeur—calculer le nombre de Chern d'un modèle de réseau à deux bandes par simple intégration donne **-0.999891028** et d'autres valeurs semblables, et l'écart à un entier se réduit comme **4.358**×10⁻⁴, **1.090**×10⁻⁴, **2.724**×10⁻⁵ pour des maillages de 200, 400 et 800. Affiner d'un facteur quatre le réduit de **15.996**, c'est donc une erreur numérique. Pendant ce temps, déplacer continûment le paramètre ne déplace pas l'entier (section 5).

Sixièmement, la constante de structure fine ne peut être exacte en aucun des deux sens—étant sans dimension, elle ne peut être fixée par définition, et n'étant pas un entier, elle n'est pas protégée par la topologie. Son écart à l'entier le plus proche, **0.035999178**, vaut **1.6419**×10⁶ fois sa propre incertitude de mesure et ne se réduit pas avec un calcul plus fin (section 7).

Mots-clés : constante de structure fine, nombre de Chern, effet Hall quantique, définition des unités, invariant topologique, grandeur sans dimension, perméabilité du vide.

Portée (scope note) : Aucun théorème nouveau ni aucune loi nouvelle n'est revendiqué—la quantification de la résistance de Hall, la quantification du flux, l'intégralité du nombre de Chern et la révision des unités de 2019 sont tous standard. On ne prétend pas que la topologie a figé la valeur—ce qui a figé la valeur de la constante de von Klitzing, c'est la décision de 2019, non la topologie. Ce que la topologie fige, c'est l'entier. Aucun théorème de l'indice n'est dérivé—aucune preuve que le nombre de Chern est entier n'est donnée. Ici on observe seulement numériquement qu'une simple intégrale s'approche d'un entier. Aucun mécanisme de l'effet Hall quantique n'est dérivé—pourquoi il se quantifie, et comment agissent les états de bord ou le désordre, ne sont pas le sujet. Le cas fractionnaire n'est pas traité—seul le cas entier est examiné. La précision expérimentale n'est pas discutée—à quel point les mesures réelles s'accordent n'est pas le sujet ; on demande seulement ce qui entre dans la formule. On ne répond pas à la question de savoir pourquoi elle vaut 137—suivant la mise en garde de l'Article 101 et de l'Article 1056, aucune explication de la valeur n'est tentée. Relation avec les articles antérieurs : la portée de l'Article 514 dit qu'aucun théorème de l'indice n'est dérivé, que l'intégralité de l'invariant relève du territoire de l'article numéro 70, et qu'elle est seulement empruntée—cet article prend cette place (aucun occupant antérieur). Le côté entier qui n'était qu'emprunté est calculé ici, et montré exact en un sens différent du côté des unités. L'Article 514 a montré qu'aucune propriété de l'échantillon n'entre dans la résistance quantifiée, et a dressé la liste des valeurs divisées par des entiers—cet article ne produit pas cette liste à nouveau mais la relit comme un produit de deux exactitudes. L'Article 270 a montré que le deux du quantum de flux est un décompte de porteurs et que la révision de 2019 a rendu sa valeur exacte—on ajoute ici ce à quoi la même révision a renoncé. L'Article 10 a établi que seuls les nombres sans dimension peuvent être ajustés finement—cet article utilise la réciproque : seule une grandeur ayant une dimension peut être fixée par définition. L'Article 1057 a mesuré qu'en 2019 un facteur 4π a cessé d'être exact—ici cela est identifié comme le prix de l'échange. L'Article 1056 a montré que la constante de structure fine ne bouge pas avec les unités mais bouge avec l'énergie—cet article ajoute, du côté qui ne bouge pas, la raison pour laquelle on ne peut pas la déplacer. L'Article 1055 a réparti les nombres selon qu'ils bougent ou non quand les unités changent—ici on montre que le côté qui ne bouge pas se divise encore en deux. L'Article 1049 a montré que fixer une constante indépendante retire exactement une case d'unités—la révision de 2019 est un cas de cette soustraction. L'Article 300 a montré qu'il est décidable si deux choses partagent une racine—suivant cette discipline, les deux sortes d'exactitude ne sont pas dites de même racine. Ce qui est ajouté : séparer le mot exact en deux choses différentes, écrire la révision de 2019 comme un échange en nombres, confirmer en déplaçant effectivement le paramètre que l'exactitude topologique est une exactitude sous déformation continue, montrer par la convergence en maillage que l'écart à un entier est une erreur numérique, et écrire le séparateur selon lequel la constante de structure fine ne peut être exacte en aucun des deux sens.

1. Dispositif et question

Dispositif : la constante de structure fine α ne bouge pas quand les unités changent, mais elle bouge quand l'énergie change. L'Article 1056 l'a mesuré, et l'Article 1057 a mesuré pourquoi elle s'arrête à basse énergie.

Question : il existe des grandeurs construites à partir de la même charge e et de la même constante de Planck h qui ne bougent pas du tout——la constante de von Klitzing $R_K = h/e^2$ et le quantum de flux $\Phi_0 = h/2e$. Pourquoi l'une varie-t-elle et l'autre non ?

La question est venue de l'extérieur. Telle qu'elle est arrivée, l'explication proposée était que la quantification de Hall quantique est topologiquement exacte. C'est une bonne question, mais cette explication a l'ordre à l'envers——cet article corrige cela d'abord.

2. Le côté des unités : une grandeur ayant une dimension peut être rendue exacte par définition

Depuis 2019, e et h sont des valeurs définies. Donc toute grandeur construite à partir de e et h seuls sort exacte par le calcul.

Grandeur	Formule	Valeur
constante de von Klitzing	h/e^2	25812.807459 ohms
quantum de conductance	e^2/h	$3.874045865 \times 10^{-5}$ siemens
quantum de flux	$h/2e$	$2.067833848 \times 10^{-15}$ weber

Aucune des trois n'utilise α à aucun moment. Contrôle : déplacer α d'un relatif de 1×10^{-6} change R_K de **0.000** $\times 10^0$ ——comme il se doit, puisque α n'est pas dans la formule.

Ce qui fait le travail, c'est que ces trois portent une dimension. L'ohm, le siemens et le weber sont des unités dérivées dont les valeurs numériques bougent avec le choix de l'échelle. Une grandeur qui bouge peut être rendue exacte en décidant où la déplacer.

3. La révision de 2019 a été un échange

L'exactitude n'a pas été gagnée gratuitement. En échange de ce que e et h ont pris la place exacte, quelque chose l'a quittée.

Grandeur	Avant 2019	Maintenant
charge élémentaire e , constante de Planck h	mesurées	définies (exactes)
h/e^2 , $h/2e$	mesurés	exacts
perméabilité du vide μ_0	définie comme $4\pi \times 10^{-7}$	mesurée
constante de structure fine α	mesurée	mesurée

Que ce soit un échange se voit dans la formule.

$$\mu_0 = \frac{2\alpha h}{e^2 c}$$

À droite, seule α est une grandeur mesurée. Le calcul donne $1.2566370612628 \times 10^{-6}$, une différence relative de 5.718×10^{-12} avec la valeur recommandée. Et déplacer α d'un relatif de 1×10^{-6} déplace μ_0 d'exactlyment 1.000×10^{-6} — du même montant relatif.

⇒ le μ_0 actuel porte directement l'incertitude de α . L'Article 1057 a mesuré l'écart à $4\pi \times 10^{-7}$: 5.444×10^{-10} , soit **3.629** fois l'incertitude, avec la valeur recommandée précédente (CODATA 2018), et 1.320×10^{-10} , soit **0.825** fois l'incertitude, avec l'actuelle (CODATA 2022) ; le signe de l'écart s'est aussi inversé — ici, le fait que ce nombre bouge à chaque révision des valeurs recommandées est nommé comme le prix de l'échange. L'Article 1049 a montré que fixer une constante indépendante retire exactement une case d'unités — la révision de 2019 est cette soustraction se produisant en pratique.

4. Une grandeur sans dimension ne peut pas être rendue exacte par définition

On pourrait demander pourquoi on n'a pas pu faire de même avec α . La raison est visible en nombres. Cinq choix d'échelle ont été essayés, en listant les valeurs numériques de $1/\alpha$ et de R_K .

Échelle (masse, longueur, temps)	valeur de $1/\alpha$	rapport pour R_K
1, 1, 1	137.035999178	1.000000×10^0
12.6, 1, 1	137.035999178	7.957747×10^{-2}
1, 12.6, 1	137.035999178	6.332574×10^{-3}
1, 1, 0.0796	137.035999178	7.957747×10^{-2}
$10^7, 10^{-9}, 10^3$	137.035999178	1.000000×10^{14}

La dispersion de $1/\alpha$ est 0.000×10^0 ; la dispersion des rapports pour R_K est 1.000×10^{14} .

⇒ une grandeur dont la valeur bouge avec l'échelle peut être rendue exacte en choisissant l'échelle ; une qui ne bouge pas ne le peut pas.L'Article 10 a établi que seuls les nombres sans dimension peuvent être ajustés finement —ce qui est utilisé ici est la réciproque : seule une grandeur ayant une dimension peut être fixée par définition.

5. L'exactitude topologique est autre chose

Jusqu'ici la topologie n'est pas apparue une seule fois.Que fait-elle donc ?Un modèle de réseau à deux bandes est calculé directement.

$$\mathbf{d}(k) = (\sin k_x, \sin k_y, m + \cos k_x + \cos k_y)$$

Le nombre de Chern compte combien de fois le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{d}}$ recouvre la sphère.Il a été obtenu par simple intégration plutôt que par la formule sur réseau qui renvoie exactement un entier—parce que l'approche d'un entier est elle-même le résultat.

m	nombre de Chern	écart à un entier
3.00	-0.000003809	3.809×10^{-6}
1.00	-0.999891028	1.090×10^{-4}
-1.00	0.999891028	1.090×10^{-4}
-3.00	0.000003809	3.809×10^{-6}

Arrondis, ils valent 0, −1, +1, 0. Pour $|m| > 2$ il vaut 0, et inverser le signe de m inverse le signe.

Ensuite, le paramètre est déplacé continûment. Voilà ce que signifie l'exactitude topologique.

m	nombre de Chern
0.40	−0.999739219
0.80	−0.999882515
1.20	−0.999884102
1.60	−0.999776813
1.90	−0.998002354

En faisant aller m de 0.4 à 1.9, la dispersion n'est que de 1.882×10^{-3} et l'entier arrondi reste à −1 tout du long. La valeur n'est fixée nulle part par définition—elle ne bouge pas sous un changement continu, et c'est cela l'exactitude topologique.

Qu'est-ce que l'écart restant ? On a affiné le maillage pour le savoir.

Maillage	écart à un entier
200	4.358×10^{-4}
400	1.090×10^{-4}
800	2.724×10^{-5}

Affiner d'un facteur quatre réduit l'écart de **15.996**—convergence du second ordre, donc c'est une erreur numérique et non un écart physique.

6. Les deux exactitudes se tiennent côte à côte dans un produit

L'Article 514 a montré qu'aucune propriété de l'échantillon n'entre dans la résistance quantifiée, et a dressé la liste des valeurs divisées par des entiers—25812.807459 ohms pour $\nu = 1$, 12906.403730 pour $\nu = 2$, 8604.269153 pour $\nu = 3$ et 6453.201865 pour $\nu = 4$. Cette liste n'est pas produite à nouveau ici mais relue.

$$R = \frac{R_K}{\nu}, \quad R_K = \frac{h}{e^2}$$

Deux exactitudes d’origine différente se tiennent dans cette formule. R_K est exacte par la définition des unités ; ν est exact par la topologie.La première a été décidée par des humains en 2019. La seconde ne bouge pas sous une déformation continue.

L’Article 300 a montré qu’il est décidable si deux choses partagent une racine——ces deux-là n’en partagent pas.Un séparateur peut se dire simplement : l’exactitude porte-t-elle une date——l’exactitude de R_K porte l’année 2019, celle de ν aucune.L’Article 70 a montré que 4π et $32\pi^2$ sont des normalisations du théorème de l’indice——la preuve que ν est un entier vit de ce côté-là, et cet article ne fait que l’emprunter.

7. La constante de structure fine ne peut être exacte en aucun des deux sens

Il n’y a que deux routes vers l’exactitude, et α ne peut prendre ni l’une ni l’autre.

- (a) La route de la définition : α est sans dimension, donc sa valeur ne bouge pas quand on choisit l’échelle (section 4).Un nombre qui ne bouge pas n’a aucune destination où être envoyé.
- (b) La route de la topologie : α n’est pas un entier.Avec $1/\alpha = 137.035999178$, l’écart à l’entier le plus proche est **0.035999178**.

Que cet écart ne soit pas un quasi-entier est vérifié contre l’erreur numérique.L’écart du nombre de Chern se réduisait avec le maillage, tandis que l’écart de α vaut **1.6419**×10⁶ fois sa propre incertitude de mesure de 2.193 ×10⁻⁸ et ne se réduit pas avec un calcul plus fin.

Grandeur	Dimension	Exacte ?	Source de l’exactitude
h/e^2	oui	exacte	définition des unités (2019)
$h/2e$	oui	exacte	définition des unités (2019)
nombre de Chern	aucune (entier)	exact	topologie (non déplacé par déformation)
μ_0	oui	mesurée	a cessé d’être exacte en 2019
$1/\alpha$	aucune (pas un entier)	mesurée	aucune route n’est ouverte
rapport de masse proton sur électron	aucune (pas un entier)	mesuré	de même

La dernière ligne est un contrôle. Le rapport de masse 1836.15267343 est aussi sans dimension et n'est pas un entier, donc il ne peut être fixé par définition, et pourtant il ne varie pas. L'Article 1056 a montré que α ne bouge pas avec les unités mais bouge avec l'énergie——donc ne pas pouvoir être exacte et varier ne sont pas la même chose.

La proposition reçue disait que c'est la topologie qui fige. Ce qui a été mesuré est l'inverse : ce qui a figé R_K est la décision de 2019, et ce que la topologie fige est l'entier. Ce fut pourtant une bonne question——c'est elle qui a rendu visible que deux exactitudes partagent une même formule.

Conclusion

Conclusion : il y a deux sortes d'exactitude, l'une fixée par les unités et l'autre non déplacée par une déformation continue. Une grandeur ayant une dimension peut être rendue exacte par définition——la constante de von Klitzing vaut **25812.807459** ohms et le quantum de flux **2.067833848** $\times 10^{-15}$ weber, tous deux à partir des seules valeurs définies. La révision de 2019 a été un échange——la perméabilité du vide est retrouvée à partir de la constante de structure fine à un relatif de **5.718** $\times 10^{-12}$, se déplace de **1.000** $\times 10^{-6}$ quand cette constante se déplace d'un relatif de 1×10^{-6} , et l'écart à $4\pi \times 10^{-7}$, qui a bougé avec la révision des valeurs recommandées de **5.444** $\times 10^{-10}$ (CODATA 2018) à **1.320** $\times 10^{-10}$ (CODATA 2022, **0.825** fois l'incertitude), en est le prix. Une grandeur sans dimension ne peut pas être rendue exacte par définition——sur cinq échelles, la dispersion de l'inverse de la constante de structure fine est **0.000** $\times 10^0$ contre une dispersion de contrôle de **1.000** $\times 10^{14}$. L'exactitude topologique n'est pas la fixation d'une valeur——le nombre de Chern sort à **−0.999891028** et d'autres valeurs semblables, mais l'écart est une erreur numérique qui se réduit de **4.358** $\times 10^{-4}$ à **2.724** $\times 10^{-5}$ d'un facteur **15.996**, tandis qu'un mouvement continu du paramètre laisse l'entier immobile (dispersion **1.882** $\times 10^{-3}$). La résistance de Hall quantique mesurée est le produit des deux——la liste divisée par des entiers que l'Article 514 a produite est relue comme un produit de l'exactitude par définition et de l'exactitude par topologie. La constante de structure fine ne peut être ni l'une ni l'autre——sans dimension, donc non définissable, et avec un écart à un entier de **0.035999178** qui vaut **1.6419** $\times 10^6$ fois sa propre incertitude, donc non protégée. Pour le dire franchement——la proposition reçue avait l'ordre inversé, mais c'est cette proposition qui a rendu visible que deux exactitudes partagent une même formule. Le séparateur——savoir si la grandeur a une dimension, est un entier, ou ni l'un ni l'autre. Avec une dimension elle peut être fixée par définition, comme entier par la topologie, et une grandeur qui n'est ni l'un ni l'autre ne peut prendre aucune route.

Registre des révisions

Deuxième édition (septembre 2026) : La constante de structure fine est passée de la valeur recommandée CODATA 2018 **7.2973525693** $\times 10^{-3}$ à la valeur recommandée CODATA 2022 **7.2973525643** $\times 10^{-3}$ (son inverse calculé est **137.035999178** ; qu'il diffère au dernier chiffre de l'inverse recommandé **137.035999177** tient seulement à l'arrondi de la valeur recommandée ; l'incertitude relative est **1.6** $\times 10^{-10}$). En conséquence, la différence relative en retrouvant la perméabilité du vide à partir de la constante de structure fine est devenue **5.718** $\times 10^{-12}$, et l'écart à l'entier le plus proche

vaut désormais 1.6419×10^6 fois sa propre incertitude (la première édition avait 1.7513×10^6 fois). Pour l'écart à $4\pi \times 10^{-7}$, la première édition citait le nombre de l'Article 1057 (avec CODATA 2018, 5.444×10^{-10} , soit **3.629** fois l'incertitude) ; avec CODATA 2022, il vaut 1.320×10^{-10} , soit **0.825** fois l'incertitude, dans la marge, et son signe s'inverse. La lecture de la section 3 et de la conclusion a donc été changée de « la taille de l'écart est le prix » en « la définition ayant été abandonnée, le prix est que la valeur bouge à chaque révision des valeurs recommandées », et les deux valeurs sont placées côte à côte. Les nombres et les conclusions des autres sections sont inchangés.

Références

1. Bernevig, B. A., & Hughes, T. L. (2013). *Topological Insulators and Topological Superconductors*. Princeton University Press.
2. Bureau International des Poids et Mesures (2019). *The International System of Units (SI)*. BIPM.
3. Klitzing, K. von, Dorda, G., & Pepper, M. (1980). New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Physical Review Letters*.
4. National Institute of Standards and Technology (2019). *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018*. NIST.
5. National Institute of Standards and Technology (2024). *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2022*. NIST.
6. Thouless, D. J., Kohmoto, M., Nightingale, M. P., & den Nijs, M. (1982). Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*.
7. Yamagishi, Y. (2026). *Only Dimensionless Numbers Can Be Fine-Tuned* [Article 10]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404556
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Home of the Constants* [Article 70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
9. Yamagishi, Y. (2026). *Admiration and Caution* [Article 101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Two in the Flux Quantum Is Neither a Dimension nor an Exponent but a Count of Carriers* [Article 270]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169893
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Three Hundredth Census: Whether Two Things Share a Root Is Decidable* [Article 300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
12. Yamagishi, Y. (2026). *A Resistance Containing No Property of the Sample Is Actually Measurable* [Article 514]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22862259
13. Yamagishi, Y. (2026). *There Are Three Unit Slots Because Mechanics Uses Only Three Kinds of Quantity* [Article 1049]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22902445
14. Yamagishi, Y. (2026). *The Speed of Light Is Near Three Hundred Million Because Length Is Decimal and Time Is Sexagesimal* [Article 1055]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22905177
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Fine-Structure Constant Does Not Move with the Units, but It Moves with Energy* [Article 1056]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22905436

16. Yamagishi, Y. (2026). *What Freezes 137 Is Not a Number but a Single Mass* [Article 1057]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22905687

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)