一つの倍率しか持たない系では、比だけが決まって位置は決まらない

— 階層は一定の比で並ぶが、どこから始まるかは式が決めない — 分離子は、比を動かすのが置換規則か、方程式の係数か — [論文1060]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文1053 は、拡大しても同じという要求を一つの倍率に弱めると指数の唯一性が失われ、代わりに一意になるのは比のほうだと示した。ただし、その射程注記は対数周期の因子が実在の系で見えるとは言わないと書き、物理の側を空けた。本稿はそこに一つ置く。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、一つの倍率しか持たない物理の系で、その倍率を実際に出した——同じ質量の三体・到達距離ゼロの極限で立つ超越方程式を、符号が変わる区間を印字してから二分すると **1.006237825103** となり、式に入れると残りは **4.441×10⁻¹⁶** である。長さの比は **22.694382595**、エネルギーの比はその二乗の **515.035001** になる（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。決まるのは比だけで、階層の絶対の位置は決まらない——位相を替えると段の位置は **7.300000000** 倍まで動くのに、隣どうしの比の散らばりは **0.000×10⁰** である。位置を決めるには、この式の外から別の入力が要る（第3節）。 第三に、対数の中でだけ周期的である——長さを比の二乗だけ倍すると値はぴたりと戻る（差 **0.000×10⁰**）が、比の一乗では **2.000000000** まで離れる。連続な拡大に対しては対称でなく、一つの倍率に対してだけ対称である（第4節）。 第四に、比を決めているのは、その方程式の係数である——係数を 4.000000 から 6.000000 まで動かすと、長さの比は **33.006464**、**22.694383**、**19.129043**、**13.814519** と単調に減る（第5節）。 第五に、論文1053 の比とは別根である——1053 が置換行列から出した **2.618033989** を独立に再現したうえで、置換行列を替えるとタイルの比だけが **1.618033989** に動いて三体の比は動かず、方程式の係数を替えると三体の比だけが **13.814519** に動いてタイルの比は動かない。逆向きに盲目である（第6節）。 第六に、正直に書く。段はすぐ尽きる——比が大きいので、長さが 100 万倍あっても入る段は **4.425045** しかない。無限の階層は理想の極限の話である（第7節）。 キーワード：離散スケール不変性、対数周期、三体の束縛状態、超越方程式、ペロン=フロベニウス、階層。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——離散なスケール不変性が対数周期の因子を許すこと、三体の階層が一定の比で並ぶこと、非負行列の最大固有値が一意であることは、いずれも既知である。超越方程式を自分で導かない——式の形は文献からそのまま借りる。本稿が行うのは、その式を解いて比を出し、何が比を動かすかを測ることだけである。実験の値を借りない——実際にいくつの段が見えたかは扱わない。質量の違う三体へ広げない——式が別になるので、同じ質量の場合だけを見る。無限の階層があるとは書かない——理想の極限の話であり、第7節で数えるとおり現実の幅では段はすぐ尽きる。束縛の機構を導かない——なぜ三体で束縛が生じるのかは主題ではない。比の構造だけを見る。論文1053 を誤りとは言わない——1053 は数学の事実に限ると自分で書いており、本稿はその外側に一つ置くだけである。既刊との関係：論文1053 の射程注記は、対数周期の因子が実在の系で見えるとは言わないと書き、示すのは離散な要求では解が絞りきれないという数学の事実だけだとした——本稿はその席に座る（先客なし）。数学の事実に限られていたところへ、一つの倍率しか持たない物理の系を一つ置く。論文1053 は、離散の側で一意になるのが指数ではなく比のほうだと示した——本稿はその比が、物理の系でも同じ役を果たすことを確かめ、さらに何が決まらないかを足す。論文117 は、スケールを持たないことを要求すると指数が一意に決まる形を四つに分けた——どれも連続な拡大を前提にしており、本稿の系はその前提の外にある。論文269 は、結晶が禁じているのが対称性ではなく周期性であることを示した——本稿に出る黄金比は、そこで出た値と同じ数だが、役が違う。論文1052 は、似た形の二つが何に反応するかで分かれることを示した——本稿も同じ判定を当て、分かれる先は置換規則と方程式の係数である。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した——その基準に従い、二つの比を同根とは呼ばない。加えたのは、一つの倍率しか持たない物理の系で、その倍率を方程式から実際に解いて出したこと、決まるのが比だけで位置は決まらないことを、位相を替えて数で示したこと、対数の中でだけ周期的であることを、戻る場合と戻らない場合の両方で確かめたこと、比を動かすのが方程式の係数だと係数を振って示したこと、論文1053 の比と本稿の比が逆向きに盲目であることを四つの組で確かめたことである。

1. 設定と問い

設定：論文1053 は、拡大しても同じという要求を一つの倍率に弱めると、冪の指数が一意に決まらなくなることを示した。代わりに一意になるのは、比のほうである。

ただし 1053 は、射程注記でこう断っている——対数周期の因子が実在の系で見えるとは言わない、示すのは離散な要求では解が絞りきれないという数学の事実だけである、と。

問い：では、一つの倍率しか持たない物理の系では、何が決まって何が決まらないのか。本稿はそこに一つ置いて数える。

2. 超越方程式を解く

同じ質量の三体で、到達距離をゼロにした極限を考える。そこで立つ方程式は、文献に次の形で書かれている。

$$s\cosh\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{\pi s}{6}\right)$$

⚠️ この式の導出は本稿では行わない。文献の形をそのまま借りて、解くところから始める。

まず値を並べて、符号が変わるところを探した。$s = 1.00$ で -0.021248326、$s = 1.20$ で $+0.945905724$ である。その区間を二分すると、解は **1.006237825103** になった。検算として式に入れると、残りは **4.441**×10⁻¹⁶ である。

対照：$s = 0$ も式を満たすが、それは自明な解で、探した区間の外にある。

この解から、二つの比が出る。

量	式	値
指数	上の方程式の解	1.006237825103
長さの比	exp(π/s)	22.694382595
エネルギーの比	exp(2π/s)	515.035001

エネルギーの比は、長さの比のちょうど二乗である（相対 **0.000**×10⁰）。

3. 決まるのは比だけで、位置は決まらない

段の位置は、対数の中の位相で決まる。その位相は、上の方程式からは出てこない。位相を三通り置いて、段を並べた。

位相	段（長さ・最初の四つ）
1.000	1.0000／22.6944／515.0350／11688.4014
2.000	2.0000／45.3888／1030.0700／23376.8027
7.300	7.3000／165.6690／3759.7555／85325.3300

位置は **7.300000000** 倍まで動く。ところが、隣どうしの比は九通りすべてで同じで、散らばりは **0.000**×10⁰ である。

⇒ 式が決めるのは比であって、位置ではない。位置を決めるには、この式の外から入力が一つ要る。論文1053は離散の側で一意なのが比のほうだと示した——ここではその裏側、すなわち何が一意にならないかを数えている。

4. 対数の中でだけ、周期的である

位相の中身を関数として書くと、長さの対数の中で振動する形になる。実際に長さを倍していって、値が戻るかを見た。

長さ	位相の値
1.000000	1.000000000000
515.035001	1.000000000000
265261.052652	1.000000000000
136618726.619734	1.000000000000

比の二乗だけ倍すると、値はぴたりと戻る（差 **0.000×10⁰**）。対照：比の一乗だけ倍すると戻らず、**2.000000000** まで離れる。

⇒ 連続な拡大に対しては対称でなく、一つの倍率に対してだけ対称である。論文117 は、スケールを持たないことを要求すると指数が一意に決まる形を四つに分けた——どれも連続な拡大を前提にしており、この系はその前提の外にある。

5. 比を決めているのは、方程式の係数である

では、この比はどこから来るのか。方程式の係数を動かして、比がどう動くかを見た。

係数	指数	長さの比
4.000000	0.898444130	33.006464
4.618802	1.006237825	22.694383
5.000000	1.064510839	19.129043
6.000000	1.196468970	13.814519

係数が大きいほど比は小さくなり、散らばりは **19.191945** になる。二行目の **4.618802** が、文献の式の係数である。

⇒ 比を決めているのは、この方程式の係数である。この一行が、次の節の判定に効く。

6. 論文1053 の比とは、別根である

論文1053 は、置換行列の固有値からタイルの個数の比を出した——2.618033989 である。本稿でも独立に計算すると **2.618033989** となり、一致する。

二つの比は、どちらも「一つの倍率しか持たない」系から出ている。同根だろうか。論文300 の基準は、何を動かすと動くかを見ることである。

動かすもの	タイルの比	三体の比
（もとの値）	2.618033989	22.694383
置換行列を替える	1.618033989	22.694383
方程式の係数を替える	2.618033989	13.814519

置換行列を替えると、タイルの比だけが **1.618033989** に動き、三体の比はまったく動かない。方程式の係数を替えると、三体の比だけが **13.814519** に動き、タイルの比はまったく動かない。

⇒ 逆向きに盲目である。論文300 の基準で、同根ではなく別根である。論文1052 は、似た形の二つが何に反応するかで分かれることを示した——本稿も同じ判定を当て、分かれる先は置換規則と方程式の係数だった。論文269 は、結晶が禁じているのが対称性ではなく周期性だと示し、そこで黄金比が出た——ここに出る同じ数は、タイルの個数の比という別の役で出ている。

7. 段はすぐ尽きる

最後に、正直に書いておきたいことがある。比が大きいので、階層はすぐ尽きる。

長さの幅	入る段の数
100	1.475015
1000	2.212523
1000000	4.425045

長さが 100 万倍あっても、入る段は **4.425045** しかない。無限の階層があると言えるのは理想の極限だけで、幅を決めれば段の数は有限に決まる。

⛔ 実験でいくつ見えたかは、本稿では扱わない。ここで数えたのは、比が大きければ段は入らないという算術だけである。

8. 分離子：何が決まり、何が決まらないか

	決まるもの	決まらないもの
連続な拡大	冪の指数	（指数は一意に決まる）
一つの倍率（数学の側）	比	指数
一つの倍率（本稿の系）	比	階層の絶対の位置

三行目が本稿の足した行である。比は方程式が決めるが、位置は決めない——そこには別の入力が要る。

結び

結び：一つの倍率しか持たない系では、比だけが決まって位置は決まらない。倍率は方程式から出る——文献の形を借りて解くと指数は **1.006237825103**（残り **4.441×10^{-16}**）で、長さの比は **22.694382595**、エネルギーの比はその二乗の **515.035001** である。だが位置は決まらない——位相を替えると段は **7.300000000** 倍まで動くのに、隣どうしの比の散らばりは **0.000×10^{0}** のままである。対称なのは一つの倍率に対してだけである——比の二乗だけ倍すると値は差 **0.000×10^{0}** で戻るが、一乗では **2.000000000** 離れる。比を決めているのは方程式の係数である——係数を動かすと長さの比は **33.006464** から **13.814519** まで、散らばり **19.191945** で動く。論文1053 の比とは別根である——置換行列を替えるとタイルの比だけが **1.618033989** に動き、係数を替えると三体の比だけが **13.814519** に動く。逆向きに盲目である。正直に書く——段はすぐ尽きる。長さが 100 万倍あっても入るのは **4.425045** である。無限の階層は理想の極限の話であり、方程式の導出も実験の値も本稿は扱っていない。分離子——比を動かすのが置換規則か、方程式の係数か。前者を動かしても後者の比は動かず、後者を動かしても前者の比は動かない。

参考文献

1. Braaten, E., & Hammer, H.-W. (2006). Universality in few-body systems with large scattering length. *Physics Reports*.
2. Efimov, V. (1970). Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Physics Letters B*.
3. 山岸勇輝 (2026).『スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ』[論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
4. 山岸勇輝 (2026).『結晶が禁じているのは対称性ではなく、周期性である』[論文269]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169855
5. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

6. 山岸勇輝 (2026). 『「一つ減る」は二つあり、片方は穴を数え、片方は次元を数える』[論文1052]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22903834

7. 山岸勇輝 (2026). 『「拡大しても同じ」を一つの倍率に弱めると、指数の唯一性は失われる』[論文1053]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22904428

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)