同じ計量の上で、曲率を消す道と捩率を消す道が選べる

— 目盛りの十六のうち六つは計量に届かない — 分離子は、消すのが曲率か、捩率か — [論文1064]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

曲がった空間を測るには、各点に目盛りを置く。四次元なら目盛りは十六の成分を持つが、計量は十だけで書ける。残る六つはどこへ行くのか、そして目盛りを与えたあと「まっすぐ」はどう決まるのかを、本稿は数で追う。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、目盛りのうち計量に届く数は、対称な行列の成分数である——目盛りから計量への写像の階数を実際に数えると、次元 2・3・4・5 で 3・6・10・15 であり、届かない数は 1・3・6・10 である。 第二に、その届かない六つは、計量を保つ回転の自由である——計量を保つ変換の自由度を独立に数えると 6 で、その六つの向きに目盛りを回しても計量の動きは最大 **2.442×10⁻¹⁵** にとどまる。対照に一般の変換を当てると **2.905316751** 動く。 第三に、これが本稿の芯である。同じ一つの目盛りから、二つの接続が作れる——半径 1 の球面で、捩率を消す道は捩率が式として恒等的に 0 で曲率の最大が **1.000000000000**、曲率を消す道は曲率が式として恒等的に 0 で捩率の最大が **0.642092615934** である。 第四に、二つとも計量を保つ——どちらも計量の共変微分が式として恒等的に 0 であり、対照に一成分だけずらした接続を当てると **0.666666666667** になる。 第五に、途中で混ぜると、どちらも消えない——混ぜ方を 0 から 1 まで動かすと捩率は 0 から **0.642092615934** へ、曲率は **1.000000000000** から 0 へ一次に動き、中央では **0.321046307967** と **0.500000000000** である。 第六に、四次元でも同じ入れ替わりが起きる——重い天体のまわりの計量で、捩率を消す道は曲率の最大が **0.333333333333**、曲率を消す道は捩率の最大が **0.642092615934** であり、二つとも計量を保つ。 正直に書く——どちらを採るべきかは決めない。捩率を持つ重力の理論を作らず、それが標準の理論と等価かどうかにも立ち入らない。 キーワード：四脚場、局所ローレンツ変換、接続、捩率、曲率、計量両立、分離子。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——四脚場、局所ローレンツ変換、レヴィ＝チビタ接続、ヴァイツェンベック接続、捩率は、いずれも標準的である。どの接続を採るべきかを決めない——本稿が測るのは、二つの名前の付いた接続が同じ計量の上でどこに立っているかまでであり、物理がどちらを選ぶべきかには立ち入らない。捩率を持つ重力の理論を作らない——並べるのは標準的な道具二つだけである。等価かどうかを論じない——曲率を消す側から書き直した重力の理論が、標準の理論と同じ予言をするかどうかは、本稿の外である。物質場との結合に立ち入らない——スピンを持つ場が捩率とどう結びつくかは扱わない。なぜ六つなのかを一般論で言い換えない——数えるのは成分の数までで、その数が何の表現かは書かない。二つを同根とは呼ばない——共有しているのは「計量を保つ」ことだけで、片方を動かして他方が動く仕組みは何も測っていない。既刊との関係：論文202 は、計量だけでは接続が決まらないことを数え、計量を保つという要求だけでは次元 2・3・4・5 で 2・9・24・50 の自由が残り、それが捩率テンソルの成分数と一致することを示した——本稿が数えるのは反対側で、接続ではなく目盛りの側の自由である。四次元で 202 の数は 24、本稿の数は 6 であり、混ぜてはならない。論文91 は「曲率」という一語がいくつもの別のものを指すことを書いた——本稿はそのうち一つを、消せる量として扱う。論文95 は規約と事実を分けた——本稿では、目盛りの向きが規約で、計量が事実である。論文198 は「まっすぐ」と「最短」が離れる場所を測った——本稿は、その「まっすぐ」を決めている道が同じ計量の上に二つあることを示す。論文300 は同根か別根かは判定できると示した——その規律に従い、共有している一点だけを書いて同根とは呼ばない。加えたのは、目盛りから計量への写像の階数を四つの次元で数えたこと、届かない成分の数が計量を保つ変換の自由度と一致することを回して確かめたこと、同じ目盛りから作った二つの接続が、消す量を取り替えた位置に立つことを厳密に示したこと、二つを混ぜるとどちらも消えないことを測ったことである。

1. 設定と問い

曲がった空間や時空を測るとき、各点に「目盛り」を置く道具がある。それぞれの点で、互いに直交して長さ 1 の向きを d 本そろえたものである。四次元なら四本で、成分を並べると 4×4 の十六の数になる。

ところが計量は対称な行列なので、四次元では十の数しか持たない。十六を与えて十しか使わないなら、残る六つはどこへ行くのか。

そしてもう一つ問いがある。論文202 は、計量を与えても接続は決まらず、二つの要求が選ばれてはじめて一つに定まることを示した。では目盛りを与えると、接続はどう決まるのか。

本稿はこの二つを数で追う。答えは両方とも同じ場所から出る——余った六つが、二つ目の接続を作る。

2. 十六のうち、いくつが計量に届くか

目盛りから計量への写像は決まっている。目盛りの成分を少しずつ動かして計量がどれだけ動くかを数値的に微分し、その行列の階数を取れば、「計量に届く成分の数」が出る。残りは動かしても計量が動かない向きであ

る。

次元	目盛りの成分	届く数	届かない数	行列の形
2	4	3	1	3×4
3	9	6	3	6×9
4	16	10	6	10×16
5	25	15	10	15×25

届く数は $d(d+1)/2$、つまり対称な行列の成分数とぴったり一致する。届かない数は $d(d-1)/2$、つまり反対称な行列の成分数である。四次元では $16 = 10 + 6$ になる。

ここで論文202 の数と混ぜてはならない。202 が数えたのは接続の側の自由で、四次元では 24 である。本稿が数えるのは目盛りの側の自由で、四次元では 6 である。どちらも「計量が決めきらない自由」だが、数える対象が違う。

3. 届かない六つの正体

余った六つが何かは、別の道から独立に数えられる。計量を保つ変換は、行列 L が $\eta L + L^{\mathsf{T}}\eta = 0$ を満たすものである。この線形の条件を特異値分解で解いて解空間の次元を取ると、四次元では $\mathbf{6}$ という数が出る。

そして実際に、その六つの向きに目盛りを回してみる。計量がどれだけ動くかを測ると、六つとも最大 $\mathbf{2.442\times10^{-15}}$ にとどまった。これは倍精度の刻みの大きさであって、動いていない。

目盛りに当てた変換	計量の動きの最大
計量を保つ六つの向き	$\mathbf{2.442}\times10^{-15}$
一般の変換（対照）	**2.905316751**

対照を置いたのは、この検査が落ちうることを示すためである。計量を保たない変換を当てれば、計量は本当に動く。

だから届かない六つは、各点で目盛りを回す自由である。論文95 の言い方をすれば、目盛りの向きは規約であり、計量は事実である。同じ計量を、六つのつまみのどの位置からでも書ける。

4. 同じ目盛りから、二つの接続

ここからが本稿の芯である。目盛りを一つ固定すると、接続の作り方が二つある。

一つ目は標準の道で、計量から第一種・第二種の記号を作る。これは捩率が 0 になるように選ばれている。二つ目は、目盛りそのものが平行に運ばれると要求する道である。こちらは目盛りの微分から直接に係数を作る。

半径 1 の球面で、記号のまま両方を計算した。計量は角度の二つの座標で書かれ、数を代入せずに式のまま扱う。

作り方	捩率の最大	曲率の最大
捩率を消す道（標準）	式として 0	**1.000000000000**
曲率を消す道（目盛りを平行に運ぶ）	**0.642092615934**	式として 0

標準の道のスカラー曲率は **2.000000000000** で、半径 1 の球面の正しい値である。測り方が壊れていないことの確かめになっている。

つまり同じ球面の、同じ一つの計量の上で、曲率が 0 の接続と捩率が 0 の接続が両方取れる。球面が平らになったわけではない。「まっすぐ」の決め方を取り替えただけである。

5. どちらも計量を保つ

二つの道が同じ計量の上に立っていることは、確かめなければならない。計量の共変微分が 0 になれば、その接続は長さと角度を運ぶ途中で変えない。

作り方	式として 0 か	数を入れた後の残り
捩率を消す道	全部 0	**5.346**×10⁻¹⁷
曲率を消す道	全部 0	0
一成分だけずらした接続（対照）	0 でない	**0.666666666667**

ここで一度つまずいた。最初は「数を代入した後の値がちょうど 0 か」で判定しており、標準の道が計量を保たないという、定義からありえない結果が出た。残っていたのは倍精度の刻みの大きさの数である。本当の主張は「式として恒等的に 0」であって、数を入れた後の値ではない。判定を式の側に移して落ちが消えた。

そして対照が落ちることも確かめた。接続の一成分をずらすと、計量の共変微分は **0.666666666667** になる。この検査は落ちうる。

だから二つの道は、同じ計量を保つ接続の集まりの中の、二つの点である。論文202 が数えた自由の中で、消す量が違うだけの位置にある。

6. 途中で混ぜると、どちらも消えない

二つの接続は端である。では、そのあいだはどうなっているのか。混ぜ方の径数を 0 から 1 まで動かして、両方の量を測った。

混ぜ方	捩率の最大	曲率の最大
0.00	0	**1.000000000000**
0.25	**0.160523153984**	**0.750000000000**
0.50	**0.321046307967**	**0.500000000000**
0.75	**0.481569461951**	**0.250000000000**
1.00	**0.642092615934**	0

どちらも一次に動き、途中の三点ではどちらも 0 でない。0 になるのは端の二点だけである。

だから「捩率も曲率も両方 0」という接続は、この道の上には無い。片方を消すと、もう片方が出る。

7. 四次元でも同じ

球面は二次元である。同じことが四次元でも起きるかを、重い天体のまわりの計量で確かめた。質量を 1、半径を 6 と置き、目盛りは対角の形で与えた。

作り方	捩率の最大	曲率の最大	計量を保つか
捩率を消す道	式として 0	**0.333333333333**	式として 0
曲率を消す道	**0.642092615934**	式として 0	式として 0

入れ替わりは二次元と同じ形で起きる。曲率が 0 の接続が、重い天体のまわりでも取れる。

捩率の最大が球面と同じ **0.642092615934** になっているのは偶然ではない。どちらの目盛りでも、最大を出しているのは角度の部分の同じ成分で、同じ角度で評価しているからである。四次元に固有の数ではない。

8. 分離子

分離子は、何を 0 に置くかである。

捩率を 0 にすると、球面で曲率 **1.000000000000** が残り、四次元では **0.333333333333** が残る。曲率を 0 にすると、どちらでも捩率 **0.642092615934** が残る。そして計量はどちらでも同じで、二つとも計量を保つ。

取っ手をもう一つ言える。目盛りを計量を保つ六つの向きに回しても計量は動かないが（$\mathbf{2.442}\times10^{-15}$）、一般の変換を当てれば動く（**2.905316751**）。目盛りの向きは規約で、計量は事実である。

二つを同根とは呼ばない。共有しているのは「計量を保つ」という一点だけで、片方を動かして他方が動く仕組みは何も測っていない。論文300 の規律に従う。

9. 既刊との関係

論文202 は、計量を与えても接続は決まらないことを数え、計量を保つという要求だけで次元 2・3・4・5 に 2・9・24・50 の自由が残ることを示した。本稿が数えたのは反対側である——目盛りの側の自由で、四次元では 6 である。二つの数は別のものを数えており、混ぜてはならない。

そして 202 が「二つの要求で自由が尽きる」と書いたところへ、本稿は要求の取り替えを一つ置いた。計量を保つという要求は共通のまま、二つ目の要求だけを「捩率が 0」から「目盛りが平行に運ばれる」に替える。どちらでも自由は尽きて、結果は別の接続になる。

論文91 は「曲率」という一語が別のものを指しうることを書いた。本稿はそのうち一つを、消せる量として扱った——消せるのは、計量を変えずに接続を取り替えられるからである。

論文198 は「まっすぐ」と「最短」が離れる場所を測った。本稿は、その「まっすぐ」を決めている道が同じ計量の上に二つあることを示した。

論文95 が引いた規約と事実の線は、ここでは目盛りの上に引かれる。向きは選ぶもので、計量は与えられたものである。

そして本稿は、どちらを採るべきかを決めない。それは 202 が引いた線と同じである。

結び

結び：同じ計量の上で、曲率を消す道と捩率を消す道が選べる。目盛りのうち計量に届く数は対称な行列の成分数である——写像の階数を数えると次元 2・3・4・5 で 3・6・10・15 で、届かない数は 1・3・6・10 である。届かない六つは目盛りを回す自由である——計量を保つ変換の自由度を独立に数えると 6 で、その向きに

回しても計量の動きは **2.442×10⁻¹⁵** にとどまり、一般の変換なら **2.905316751** 動く。同じ目盛りから二つの接続が作れる——半径 **1** の球面で、捩率を消す道は捩率が式として **0** で曲率が **1.000000000000**、曲率を消す道は曲率が式として **0** で捩率が **0.642092615934** である。二つとも計量を保つ——どちらも計量の共変微分が式として **0** であり、一成分だけずらした接続なら **0.666666666667** になる。途中で混ぜるとどちらも消えない——中央では捩率 **0.321046307967**、曲率 **0.500000000000** である。四次元でも入れ替わりは同じ形で起きる——重い天体のまわりの計量で、曲率 **0.333333333333** と捩率 **0.642092615934** が入れ替わり、二つとも計量を保つ。正直に書く——どちらを採るべきかは決めない。捩率を持つ重力の理論を作らず、それが標準の理論と等価かどうかにも立ち入らない。分離子——消すのが曲率か、捩率か。前者を消せば捩率が残り、後者を消せば曲率が残る。計量はどちらでも同じである。

参考文献

1. Aldrovandi, R., & Pereira, J. G. (2013). *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Springer.
2. Cartan, É. (1922). Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*.
3. Einstein, A. (1928). Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
4. Hehl, F. W., von der Heyde, P., Kerlick, G. D., & Nester, J. M. (1976). General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects. *Reviews of Modern Physics*.
5. Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman.
6. Weitzenböck, R. (1923). *Invariantentheorie*. P. Noordhoff.
7. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である. [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
8. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実を分ける. [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
9. 山岸勇輝 (2026). 「まっすぐ」は「最短」を意味せず、柵は二つある. [論文198]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107954
10. 山岸勇輝 (2026). 接続は計量から導かれない。二つの要求が選ばれて、はじめて一つに決まる. [論文202]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22109349
11. 山岸勇輝 (2026). 三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる. [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)