角運動量の合成が決める角は、極限を取る前から三角形の角である

— 量子の大きさを辺に取れば余弦定理そのもので、4π は規格化すると消える — 分離子は、分布を立体角で書くか、余弦で書くか — [論文1065]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

二つの角運動量を合わせると、そのなす角が決まる。大きなスピンの極限でその角が球面上の一様分布に近づく、という言い方がある。本稿はその言い方を二つに割り、片方だけが成り立つことを数で示す。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、分布が一様に寄ることは成り立つ——状態の数で重みを付けると、一様からの隔たりは大きさ 10 で **0.301393728223**、大きさ 640 で **0.006535460601** になる。重みを外すと **1.733502538071** のまま動かない。 第二に、これが本稿の芯である。その極限に 4π は現れない——同じ一様分布を立体角で書けば密度は **0.079577471546**、余弦で書けば **0.500000000000** で、比はちょうど **6.283185307180** である。4π は書き方の側に付いていて、規格化すると消える。 第三に、4π が残る場所は一つだけである——規格化していない「状態あたりの立体角」は大きさ 256 で **0.024495849151** で、これは 4π を状態の数 513 で割った値である。 第四に、三つが閉じるとき、角の和は極限を取る前からちょうど 2π である——大きさ 10 から 2560 まで、2π からの隔たりの最大は **8.882×10⁻¹⁶** であった。 第五に、その理由は、合成の角の式が余弦定理そのものだからである——量子の大きさを辺に取った三角形の余弦定理との差は最大 **1.209×10⁻¹⁶** で、分母を素の大きさに替えると和は **6.288190534258** になり崩れる。 第六に、三つの余弦を並べても三次元の角になるとは限らない——でたらめな三つ組が三次元の向きになる割合は **0.615545** で、閉じた形 **0.616850275068** と標準誤差の **1.201** 倍で合う。ここに出るのは 4π ではない。 正直に書く——スピン幾何の定理を証明しない。測るのは半古典の角の式の振る舞いまでであり、測定の確率そのものは組んでいない。 キーワード：角運動量の合成、スピンネットワーク、立体角、余弦定理、半古典の極限、相関行列、分離子。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——角運動量の合成、なす角の余弦の式、余弦定理、相関行列が半正定値であることは、いずれも標準的である。スピン幾何の定理を証明しない——測定の確率から三次元の角が出るという、より強い主張には踏み込まない。本稿が測るのは半古典の角の式の振る舞いまでである。面積の量子化を導かない——量子重力が試みるような微視状態の数え上げは行わない。スピンの網から時空を作らない——扱うのは合成が決める角の幾何だけである。測定の確率そのものは組んでいない——第2節で使うのは状態を数える重みであり、合成の係数を実際に組んで得た確率ではない。なぜ量子の大きさがあの形なのかには答えない——固有値の形は前提として借りる。二つを同根とは呼ばない——最後の節に出る円周率の二乗と、立体角の 4π は、別の場所から来ている。片方を動かして他方が動く仕組みは何も測っていない。既刊との関係：論文67 は 4π を立体角として読み、それが球面のオイラー標数の 2π 倍であることを示した——本稿はその 4π が、規格化された確率の中では消えてしまう場所を一つ置く。論文73 はブラックホール・エントロピーの係数を立体角の 4π と熱的な 2π に分け、微視状態の数え上げは行わないと断った——本稿もそこへは入らず、合成が決める角の幾何だけを測る。論文140 は対称性が比を決め力学が尺度を決めることを示し、合成の係数と換算行列要素はどちらも事実だと書いた——本稿が使うのは、その合成のうち大きさの側だけである。論文104 は計量を宿す代数を扱い、いくつもの「スピン」を混同しないための言葉を置いた——本稿の「スピン」は角運動量の大きさであって、代数の側のものではない。論文300 は同根か別根かは判定できると示した——その規律に従い、二つの円周率のあらわれを同根とは呼ばない。加えたのは、状態の数で重みを付けると分布が一様に寄り、外すと寄らないことを測ったこと、その極限に 4π が一度も現れないことを、書き方の比で示したこと、閉じた三つ組の角の和が極限を取る前からちょうど 2π であり、その理由が余弦定理であることを確かめたこと、三つの余弦が三次元の角になる割合に閉じた形が在ることを示したことである。

1. 設定と問い

二つの角運動量を合わせると、合成した大きさが決まる。そこから逆に、もとの二つがなす角が決まる。これは内積を大きさで書き直しただけの、素朴な式である。

この角について、よく聞く言い方がある——大きさを無限に大きくしていくと、角の分布は球面上の一様分布、つまり全方向にわたる 4π の平均に近づく、というものである。

本稿はこの言い方を二つに割る。①分布が球面上の一様に近づくか。②それは「4π が現れる」と同じことか。

測ると、①は成り立ち、②は成り立たない。そして割った先で、予想していなかったことが二つ出た。

2. 状態を数えると、角の分布は球面上の一様に寄る

同じ大きさ j の角運動量を二つ合わせる。合成した大きさ J は 0 から $2j$ まで動き、それぞれ $2J+1$ 個の状態を持つ。状態を一つずつ等しく数えて、なす角の余弦の分布を見る。

球面上で一様であるとは、余弦について $[-1,1]$ で一様であることと同じである。そこで密度が $1/2$ からどれだけ離れているかを測った。

大きさ	一様からの隔たり	重みを外した対照
10	**0.301393728223**	**1.695121951220**
40	**0.063607085346**	**1.736024844720**
160	**0.025318208990**	**1.730889235569**
640	**0.006535460601**	**1.733502538071**

重みを入れれば一様に寄り、外せば寄らない。対照はほとんど動かないので、この検査は落ちうる。

閉じた形でも裏が取れる。合成した大きさは余弦の関数として j に比例し、状態の数も同じ割合で増えるので、二つの効きが打ち消して密度は余弦に依らない定数になる。大きさ 640 での実測はますごとに **0.493464539399** から **0.503611946568** のあいだにあり、平均はちょうど **0.500000000000** であった。

ここで使ったのは状態を数える重みであって、合成の係数を実際に組んで得た測定の確率ではない。本稿はその区別を守り、確率そのものには踏み込まない。

3. その極限に 4π は現れない

では「4π の平均に収束する」と言えるのか。言えない。同じ一つの一様分布を、立体角で書くか余弦で書くかで、密度の数が変わるからである。

分布の書き方	密度
立体角で書く	**0.079577471546**
余弦で書く	**0.500000000000**
比	**6.283185307180**

比はちょうど 2π である。立体角で書いた密度は 4π の逆数で、余弦で書いた密度は $1/2$ である。どちらも同じ一つの分布を指しているので、4π は「どちらの変数で書くか」という選択に付いていることになる。

そしてスピンの側には、4π という数が一度も現れない。実際に並べて当ててみた。

スピンの側の数	値	4π との相対差
余弦の全幅	2	**0.840845**
密度（余弦で書いたもの）	**0.500000000000**	**0.960211**
合成の通り数	1281	**100.938741**
状態の総数	1640961	**130582.527286**

いちばん近いものでも相対差は **0.840845** で、4π には届かない。規格化された確率に 4π は残らないので、当然である。

だから「4π の一様平均に収束する」という言い方は、二つの別の主張を混ぜている。一様に寄ることは成り立つが、そのとき 4π は消えている。

4. 4π が残る一か所

では 4π は、この場面のどこにも無いのか。一か所だけ残る——規格化していない量にである。

大きさ j の系は $2j+1$ 個の状態を持つ。球面の全立体角をその数で割れば、状態ひとつあたりの立体角が出る。

大きさ	状態の数	状態あたりの立体角	その平方根
1	3	**4.188790204786**	**2.046653415893**
4	9	**1.396263401595**	**1.181635900604**
16	33	**0.380799109526**	**0.617089223311**
64	129	**0.097413725693**	**0.312111719890**
256	513	**0.024495849151**	**0.156511498462**

大きさ 256 の値 **0.024495849151** は、4π を 513 で割った値と一致する。分けられる向きの数は $2j+1$ で、立体角の 4π はそれを割る側に居る。

論文67 は 4π を立体角として読み、それが球面のオイラー標数の 2π 倍であることを示した。本稿が置いたのは、その 4π が規格化によって消える場所と、消えずに残る場所の境目である。

この割り算を面積の量子化と呼ばない。論文73 は微視状態の数え上げを行わないと断っており、本稿も同じ線を引く。

5. 三つが閉じると、角の和は極限を取る前からちょうど 2π

次に、三つの角運動量が合わさって 0 になる場合を見る。閉じた三価の節点にあたる。三つのなす角は決まるので、その和を測った。

三つの大きさ	なす角の和	2π からの隔たり
10, 10, 10	**6.283185307180**	**0.000000000000**
160, 160, 160	**6.283185307180**	**0.000000000000**
2560, 2560, 2560	**6.283185307180**	**0.000000000000**
300, 400, 500	**6.283185307180**	**0.000000000000**
900, 900, 1000	**6.283185307180**	**0.000000000000**

表の隔たりは 12 桁までの印字で、生の値の最大は $\mathbf{8.882}\times10^{-16}$、つまり倍精度の刻みの大きさである。和は近づくのではなく、どの大きさでも一致している。

本稿を書き始めたとき、筆者は「大きなスピンの極限で 2π に寄る」と見込んで検査を書き、それが落ちた。落ちた理由は物理ではなく、見込みのほうが誤っていたからである。極限の話ではなく、恒等式であった。

6. 理由は、合成の角の式が余弦定理そのものだからである

なぜ恒等式なのかを確かめた。合成の角の式は、三つの量子の大きさを辺の長さに取った三角形の、余弦定理そのものである。

三つの大きさ	辺の長さ	余弦定理との差
10, 10, 10	10.488, 10.488, 10.488	0
300, 400, 500	300.500, 400.500, 500.500	$\mathbf{1.209}\times10^{-16}$
900, 900, 1000	900.500, 900.500, 1000.500	0

三角形の三つの外角の和は必ず 2π である。だから極限を取る前から成り立っていた。

対照を置いた。分母を量子の大きさでなく素の大きさに替えると、余弦定理でなくなる。そのとき和は **6.288190534258** になり、2π からの隔たりは **0.005005227079** になる。余弦定理であることが効いている。

三角形にならない三つ組では、角そのものが実数にならない。大きさ 100 と 100 が合わさって 500 になるという組では、余弦が **11.400990** と 1 を超える。

7. 三つの余弦を並べても、三次元の角になるとは限らない

最後に、逆向きの問いを置く。三つの数を $[-1, 1]$ から取ってきて「これが三つの向きのなす角の余弦だ」と言えるか。言えるとは限らない。相関行列が半正定値でなければ、その角を持つ向きは存在しない。

三つ組の作り方	三次元の向きになる割合
でたらめに取る（20 万組）	**0.615545**
本物の三次元の向きから作る（2 万組）	**1.000000**

この割合には閉じた形が在る。三次元の相関行列の集まりの体積を立方体の体積で割った値で、**0.616850275068** である。実測との差は **0.001305** で、標準誤差 **0.001087** の **1.201** 倍にあたる。

ここに現れるのは円周率の二乗であって、4π ではない。どちらも球面から来るように見えるが、片方は全方向の大きさ、もう片方は三つの角が同時に成り立つ範囲の大きさである。論文300 の規律に従い、同根とは呼ばない。

8. 分離子

分離子は、分布を立体角で書くか、余弦で書くかである。立体角で書けば密度に 4π が残り（**0.079577471546**）、余弦で書けば消える（**0.500000000000**）。同じ一つの分布なので、動いたのは書き方だけである。

取っ手はほかに二つある。状態の数で重みを付けるかどうかで、分布が一様に寄るか寄らないかが分かれる（**0.006535460601** 対 **1.733502538071**）。規格化するかどうかで、4π が消えるか残るかが分かれる（状態あたりの立体角は **0.024495849151**）。

9. 既刊との関係

論文67 は 4π を立体角として読み、それが球面のオイラー標数の 2π 倍であることを示した。本稿はその 4π を、規格化された確率の中で追いかけて、消える場所と残る場所の境目を一つ置いた。

論文73 はブラックホール・エントロピーの係数を立体角の 4π と熱的な 2π に分け、微視状態の数え上げは行わないと断った。本稿もその線を守り、状態の数を数えるのは角の分布の重みとしてだけである。

論文140 は対称性が比を決め力学が尺度を決めることを示した。本稿が使うのは合成のうち大きさの側だけで、係数そのものは組んでいない。

論文104 はいくつもの「スピン」を混同しないための言葉を置いた。本稿の「スピン」は角運動量の大きさであって、代数の側のものではない。

そして、外から寄せられた言い方を二つに割ったことが、本稿の働きである。一様に寄ることと、4π が現れることは、別の主張であった。

結び

結び：角運動量の合成が決める角は、極限を取る前から三角形の角である。分布が一様に寄ることは成り立つ——状態の数で重みを付けると一様からの隔たりは 0.301393728223 から 0.006535460601 へ縮み、重みを外すと 1.733502538071 のまま動かない。だがその極限に 4π は現れない——同じ分布を立体角で書けば密度は 0.079577471546、余弦で書けば 0.500000000000 で、比はちょうど 6.283185307180 である。4π が残るのは規格化していない量だけである——状態あたりの立体角は大きさ 256 で 0.024495849151 になる。三つが閉じるときの角の和は極限を取る前からちょうど 2π である——隔たりの最大は 8.882×10^{-16} であった。理由は合成の角の式が余弦定理そのものだからである——余弦定理との差は最大 1.209×10^{-16} で、分母を替えると和は 6.288190534258 になり崩れる。三つの余弦を並べても三次元の角になるとは限らない——でたらめな三つ組が通る割合は 0.615545 で、閉じた形 0.616850275068 と標準誤差の 1.201 倍で合う。正直に書く——スピン幾何の定理を証明せず、面積の量子化も導かない。測定の確率そのものは組んでいない。分離子——分布を立体角で書くか、余弦で書くか。前者なら 4π が残り、後者なら消える。分布そのものは同じ一つである。

参考文献

1. Edmonds, A. R. (1957). *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton University Press.
2. Penrose, R. (1971). Angular Momentum: An Approach to Combinatorial Space-Time. In T. Bastin (Ed.), *Quantum Theory and Beyond*. Cambridge University Press.
3. Ponzano, G., & Regge, T. (1968). Semiclassical Limit of Racah Coefficients. In F. Bloch (Ed.), *Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics*. North-Holland.
4. Rovelli, C., & Smolin, L. (1995). Spin Networks and Quantum Gravity. *Physical Review D*.
5. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源. [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
6. 山岸勇輝 (2026). ブラックホール・エントロピーの「$1/4$」. [論文73]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21666086
7. 山岸勇輝 (2026). 計量を宿す代数. [論文104]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836876
8. 山岸勇輝 (2026). 対称性は比を決め、力学は尺度を決める. [論文140]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081997

9. 山岸勇輝 (2026). 三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる. [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)