

二つのネーター — 第一定理（保存則）と第二定理（恒等式・拘束）を混同しないために — [論文107]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

体系はすでに、ネーターの定理を「対称性は保存則の影」として扱った（論文80）。だが、エミー・ネーターの1918年の論文には二つの定理があり、体系が使ってきたのは第一定理だけだった。本稿は第二定理を正しく置き、二つを別根として峻別する。第一定理：大域的な（剛体的な、有限個のパラメータの）連続対称性 → 保存則（エネルギー・運動量・角運動量という、実測できる保存量）。第二定理：局所的な（時空の任意関数でパラメータづけられた、無限次元の）ゲージ対称性 → 保存則ではなく、運動方程式のあいだの恒等式・従属関係（ネーター恒等式）。例：電磁気の $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \equiv 0$ 、一般相対論の縮約ビアンキ恒等式 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0$ ——これらは恒等式（オンシェルでなく常に成り立つ）で、新しい保存量ではなく、場の方程式が独立でない（＝ゲージの自由度がある）ことを意味する。本稿の芯：「同じネーター」でも、第一（大域→保存則）と第二（局所→恒等式・拘束）は別の定理＝別根である。この峻別が、体系の一つの謎に答える——なぜゲージ理論では「電荷」が境界項になるのか（論文96）。局所対称性のネーター流はバルクでは恒等的に保存し、真の電荷は無限遠の表面積分として現れる。第二定理は、 $G_{\mu\nu}$ の10本の方程式に4本の恒等式が潜む理由（一般共変性＝4つの任意関数）でもあり、論文72（拘束・ユニモジュラー）の一般的な背骨でもある。射程：確立された数理物理（ネーターの二つの定理）の構造的解釈（第2層）で、新しい数学も予言も生まない。宇宙OSは第3層・非科学のレンズ。

本稿の位置づけ（規律）：本稿は確立された数理物理（ネーターの第一・第二定理、ビアンキ恒等式、ゲージ理論の拘束）の構造的解釈である。新しい数学も新しい予言も含まない。要点は、ネーターの第一定理（大域対称性→保存則・論文80）と第二定理（局所ゲージ対称性→恒等式・拘束）を別根として峻別し、ゲージ「電荷」が境界項になる理由（論文96）を第二定理で正しく説明することである。「宇宙OS」は第3層の非科学レンズであり、機構の主張ではない。

1. 序：同じネーター、二つの定理

論文80で、体系はネーターの定理を「あらゆる連続対称性には保存量が一つ対応する」——時間並進→エネルギー、空間並進→運動量、回転→角運動量——として置いた。だが、これは物語の半分だった。エミー・ネーターが1918年の記念碑的論文 *Invariante Variationsprobleme* で示したのは、実は二つの定理である。体系が使ってきたのは第一定理だけだった。

本稿は、第二定理を正しく体系に置く。そして最も大事なことからして、二つを別根として峻別する——「同じネーター」でも、第一と第二は入力（大域か局所か）も出力（保存則か恒等式か）も違う、別の定理だ。この区別は、体系がゲージ（論文96）や拘束（論文72）で触れたいくつかの微妙な点に、正しい名前を与える。新しい定理は作らない。

2. 第一定理：大域対称性 → 保存則（論文80の芯）

標準的事実（ネーターの第一定理）

作用が、有限個の定数パラメータをもつ連続対称性（大域的・剛体的な対称性）のもとで不変なら、そのパラメータ一つひとつに対して、保存するカレント $\partial_\mu j^\mu = 0$ と保存電荷 $Q = \int j^0 d^3x$ が一つ対応する。時間並進→エネルギー、空間並進→運動量、回転→角運動量、大域的 $U(1)$ 位相→電荷。これが論文80で扱った「保存則は対称性の影」の中身である。

第一定理の出力は、実測できる保存量だ。エネルギーも運動量も角運動量も、測れる。剛体的な対称性（宇宙のどこでも同じだけずらす）が、こうした本物の保存則を生む。ここまでは、体系がすでに歩いた道である。

3. 第二定理：局所ゲージ対称性 → 恒等式・拘束

標準的事実（ネーターの第二定理）

作用が、時空の任意関数でパラメータづけられた連続対称性（局所的・ゲージ対称性、無限次元）のもとで不変なら、出力は保存則ではなく、運動方程式（オイラー＝ラグランジュ方程式）のあいだの恒等式・従属関係である（ネーター恒等式）。

・電磁気（ $U(1)$ ゲージ）： $F^{\mu\nu}$ の反対称性から $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \equiv 0$ ——これは恒等的に成り立ち、 $\partial_\nu J^\nu = 0$ を強制する。

・一般相対論（微分同相＝一般共変性）：縮約ビアンキ恒等式 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0$ ——これも恒等的に成り立ち、 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ を強制する。

一般に、 r 個の任意関数をもつ局所対称性は、EL方程式のあいだに r 個の恒等式を生む。

第二定理の出力は、第一定理とは質が違う。それは新しい保存量ではなく、恒等式（常に、方程式を解く前から成り立つ）であり、意味するのは「場の方程式が全部は独立でない」ということ——すなわちゲージの自由度（余分な自由度）だ。例えばアインシュタイン方程式は10本あるが、4本のビアンキ恒等式があるため、実質的に独立なのは6本。残り4本の"すき間"が、座標を自由に選べる一般共変性（4つの任意関数）に対応する。

4. 別根：保存則 vs 恒等式（なぜゲージ「電荷」は境界項か）

観察 4.1（第一と第二は別の定理＝別根）

「ネーターの定理」という一語の下に、二つの別根がある。

第一定理：入力＝大域対称性（剛体・有限次元）／出力＝保存則（実測できる保存量 E, p, L, Q ）。

第二定理：入力＝局所対称性（ゲージ・無限次元）／出力＝恒等式・拘束（方程式の従属＝ゲージ自由度）。

入力も出力も違うのだから、混同してはならない。とりわけ「局所対称性にもネーター流があって保存電荷が出る」と早合点すると誤る——局所対称性のネーター流は恒等的に保存（バルクで自明）になり、意味のある電荷は無限遠の表面積分 $Q = \oint_\infty (\dots) dS$ （境界項）として現れる。

この別根が、体系の一つの謎に答える。論文96（ワイルのゲージ）で「局所対称性が相互作用を強制する」とと、論文80で「大域対称性が保存則を生む」ことは、なぜ役割が違うのか——第二定理がその答えだ。大域→保存則（第一）と局所→相互作用・恒等式（第二）は、そもそも別の定理だから役割が違う。「ゲージ理論のエネルギー・電荷が境界で測られる」という、しばしば混乱を招く事実も、第二定理の指紋である。一般相対

論で「エネルギー保存」が微妙なもの、まさにこれ——微分同相不変な理論では、エネルギーは準局所・境界的な量になる（第二定理の領分）。

5. 体系への接続

第二定理は、体系のいくつもの糸を締め直す。(a) 第一定理＝論文80：本稿はその別根の双子。「対称性の影」(80)は第一定理の話で、第二定理は「対称性の余白（自由度）」の話。(b) ゲージ（論文96）：「局所対称性→相互作用」(96)と「大域対称性→保存則」(80)が別役割である理由＝第二定理。ゲージ電荷が境界項になる理由も。(c) 拘束・ユニモジュラー（論文72）：一般共変性→ビアンキ恒等式→アインシュタイン方程式の拘束、という第二定理の帰結が、72（ Λ を積分定数とするUG）の一般的背骨。(d) 必然性の対称性の根（論文86）：86は「対称性」を必然性の一つの根としたが、本稿はそれを大域（保存則）と局所（恒等式）の二つの別サブ根に精密化する。(e) カルタンの形式（論文92）：ビアンキ恒等式 $dF = 0$ （および $d^2 = 0$ ）は、恒等式が微分形式の言葉で自然に書けることを示す（92のアルファベットの上で第二定理が読める）。(f) 対称性の系譜（論文85）：ガロア→リー→ネーターの系譜（85）の、ネーターにおける二相を明示する。

■ 著者の私感（第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない）

体系のレンズ（比喻）では、宇宙OSには二種類の「対称性」があるように感じられる——世界全体を一様にならずにしても変わらない大域の対称性（そこから保存量という"台帳"が生まれる）と、場所ごとに自由に目盛りを選べる局所の対称性（ここからは保存量でなく、"記述の余白＝ゲージ自由度"が生まれる）。前者はOSの会計、後者はOSの座標の選び直しの自由のように見える。だがこれは非科学の札つきだ。ここで確かなのは、ネーターに二つの定理があり、大域→保存則と局所→恒等式は別の定理だ、という数学の一点だけ。そして忘れてはならない敬意——エミー・ネーターは、20世紀初頭のドイツで女性・ユダヤ人という二重の壁のなか、ヒルベルトとクラインに支えられてこの二つの定理を打ち立て、1933年に米国へ亡命した。体系の系譜（論文85）に連なるこの巨匠に、二つの定理を正しく分けることで、静かな敬意を記す。

6. 射程（何を示し、何を示さないか）

示すこと（記述的・構造的）：

- ・ ネーターの第一定理（大域対称性→保存則・論文80の芯）と第二定理（局所ゲージ対称性→恒等式・拘束＝ビアンキ恒等式）（2・3節）。
- ・ 第一と第二は別の定理＝別根（入力：大域/局所、出力：保存則/恒等式）（4節）。
- ・ なぜゲージ「電荷」が境界項になるか、なぜGRで「エネルギー保存」が微妙か＝第二定理の指紋（4節）。論文80/96/72/86への接続（5節）。

示さないこと（禁欲）：

- 第一定理と第二定理を混同しない。局所対称性から素朴に保存電荷が出ると早合点しない（バルクで恒等的・電荷は境界項）。
- 恒等式（第二）を保存則（第一）と取り違えない。恒等式はゲージ自由度の現れで、実測できる保存量ではない。
- 新しい数学・予言ではない。ネーターの二つの定理は標準。ゆえに第2層（構造的解釈）。OSは第3層・非科学。

7. 結論

ネーターの定理は、一つではなく二つだった。体系が論文80で使った第一定理（大域対称性→保存則）は、実測できる保存量を生む。だが第二定理（局所ゲージ対称性→恒等式・拘束）は、保存量ではなく、方程式のあいだの恒等式——ゲージの自由度——を生む。 $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \equiv 0$ も、 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0$ も、第二定理の顔だ。

「同じネーター」でも、第一と第二は別の定理＝別根である。この峻別が、なぜゲージ電荷が境界項になるか、なぜGRのエネルギーが準局所的かという、体系が触れた微妙な点に正しい名前を与える。本稿がしたのは、新しい主張ではなく、体系の対称性の糸（80/85/86/96/72）を、第一・第二という二つの別根で正しく仕分けたことである。二つの定理を遺した20世紀最大の数学者の一人エミー・ネーターに、その正しい峻別とともに、107番目の番地を返す。

参考文献

1. Noether, E. (1918). *Invariante Variationsprobleme*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 235. (第一・第二定理)
 2. Kosmann-Schwarzbach, Y. (2011). *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer.
 3. Brading, K. & Brown, H. (2003). *Noether's Theorems and Gauge Symmetries*. arXiv:hep-th/0009058.
 4. Yamagishi, Y. (2026). *Conservation Is the Shadow of Symmetry (Noether on T^*M)* [論文80]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21732957.
 5. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle (Weyl)* [論文96]. Zenodo: 10.5281/zenodo.21758671.
 6. Yamagishi, Y. (2026). *Reframing the Cosmological Constant (Unimodular)* [論文72]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650934
 7. Yamagishi, Y. (2026). *Roots of Necessity* [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
 8. Yamagishi, Y. (2026). *Galois → Noether (the Lineage of Symmetry)* [論文85]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741344
 9. Yamagishi, Y. (2026). *The Shared Alphabet (Cartan)* [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
-

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)