体積を保つことと潰せないことは、四次元から別々になる

— 行列式が 1 という一つの札の下に、二つの別の集まりがある — 分離子は、動かすのが体積か、断面の面積か — [論文1070]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

位置と運動量を並べた空間では、流れが体積を保つことが古くから知られている。だが「体積が保たれる」ことと「潰せない」ことは、同じではない。本稿はその二つが別れる場所を数で示す。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、これが本稿の芯である。二次元でだけ、二つは同じものになる——正準な写像の自由度と体積を保つ写像の自由度の差は 0・5・14・27・44 で、0 になるのは共役な組が一つのときだけである。 第二に、でたらめに作って確かめても同じである——行列式がちょうど 1 の写像を 2000 個ずつ作ると、二次元では正準からの外れが最大でも 2.642×10^{-14} だが、四次元では最小でも 2.158×10^{-1}、六次元では 7.549×10^{-1} ある。 第三に、体積を保つだけの写像は断面をいくらでも潰せる——四次元で倍率を 1000 にすると、行列式は 1.000000000000 のままで影の半径は 0.001000000000 になる。 第四に、正準な写像は断面を潰せない——でたらめに作った 20000 個のうち、影の半径が 1 を下回ったものは 0 個で、最小は 1.000000000000、最大は 1.684915×10^{4} であった。 第五に、その下限は一行で出る——影を作る二行に対する反対称形の値はどの正準写像でもちょうど 1 で（実測 0.999999999996 から 1.000000000003）、二行の長さの積はそれを下回れない。 第六に、同じ体積でも潰せなさは違う——楕円体の径数を動かすと体積の比は 1.000000000000 のままで、容量の比は 0.500000000000・0.200000000000・0.100000000000 と下がる。 正直に書く——定理を証明しない。測るのは線形写像の集まりだけで、曲がった写像にも回帰時間にも立ち入らない。 キーワード：位相空間、体積の保存、正準な写像、断面の面積、特異値、群の自由度、分離子。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ハミルトン流が位相空間の体積を保つこと、正準な線形写像のなす群とその自由度、断面が潰せないこと（グロモフ 1985）、正定値な二次形式を共役な組ごとに標準形にできること（ウィリアムソン 1936）は、いずれも標準的である。定理を証明しない——線形の場合に限り、下限がなぜ立つかを一行で書いて数で確かめるところまでである。曲がった写像に広げない——測るのは線形写像の集まりだけで、一般の正準変換は扱わない。リューヴィルの定理を言い換えない——体積が保たれること自体は既刊が扱っており、本稿が足すのは、その保存だけでは潰せなさが決まらないという一点である。回帰時間には触れない——いつ戻ってくるかは既刊の領分であり、潰せなさと結びつけない。容量は潰せなさの量、回帰は測度の話で、片方を動かして他方が動く仕組みは何も測っていない。容量の一般論を作らない——楕円体について一つの量を出すだけで、不変量が満たすべき公理には立ち入らない。数値解法の良し悪しを論じない——どの解法が優れているかは既刊の領分である。体積と容量を同根とは呼ばない——片方を固定したまま他方だけを動かせるので、同じ源を持つとは書かない。既刊との関係：論文77 は、ハミルトン流が位相空間の体積を保つことを扱った——本稿はその保存を前提として受け取り、保存だけでは決まらないものがあることを数える。論文135 は、数値解法のヤコビ行列式がちょうど 1 になることを測った——その検査は体積を保つところまでしか見ないので、四次元以上では正準でない写像も通る。本稿はその例を一つ作る。論文81 は、微視の状態がいつか戻ってくることを扱った——本稿はいつ戻るかには触れず、断面が潰せるかだけを測る。論文76 は、位相空間に共変な形で構造を置いた——本稿が数えるのは、その構造を保つ写像と体積だけを保つ写像の、自由度の差である。論文300 は同根か別根かは判定できると示した——その規律に従い、体積と容量を同根とは呼ばない。加えたのは、二つの集まりの自由度の差が閉じた形で書けて 0 になるのが一か所だけだと示したこと、でたらめに作った写像でそれを確かめたこと、体積を保つだけなら断面が千分の一まで潰せることを示したこと、正準な写像では 20000 個のどれも下限を割らないことを測ったこと、同じ体積で容量だけが十分の一になる例を作ったことである。

1. 設定と問い

位置と運動量を並べた空間の上で、ハミルトンの流れは体積を保つ。これは論文77 が扱った、よく知られた事実である。論文135 はその離散版を数え、いくつかの数値解法ではヤコビ行列式がちょうど 1 になることを測った。

そこで問いが立つ。体積が保たれるなら、その系がどこまで押しつぶせるかも決まるのだろうか。

決まらない、というのが本稿の答である。そして決まらなくなるのは、共役な組が二つ以上ある場合、つまり四次元からである。

設定はこうである。座標は位置を先に、運動量を後ろに並べる。扱うのは線形写像だけで、単位球をその写像で送り、像を最初の共役な組の作る面へ落とした影の半径を測る。影は楕円になるので、半径はその面へ落とす行列の最大特異値である。

比べるのは二つの集まりである。行列式が 1 の写像（体積を保つだけ）と、反対称な形を保つ写像（正準）。

2. 二次元でだけ、二つは同じものになる

まず自由度を数える。共役な組が n 個あるとき、正準な写像の自由度は $n(2n+1)$、体積を保つだけなら $4n^2-1$ である。

組の数	次元	正準の自由度	体積を保つ自由度	差
1	2	3	3	0
2	4	10	15	5
3	6	21	35	14
4	8	36	63	27
5	10	55	99	44

差は $(2n+1)(n-1)$ に等しく、0 になるのは組が一つのときだけである。二次元では、行列式が 1 であることと正準であることが同じ条件になる。

式で数えただけでは足りないので、実際に作って確かめた。行列式がちょうど 1 の写像をでたらめに 2000 個ずつ作り、正準からの外れを測る。

次元	外れの最大	外れの最小
2	$\mathbf{2.642}\times10^{-14}$	$\mathbf{1.529}\times10^{-18}$
4	$\mathbf{8.557}\times10^{1}$	$\mathbf{2.158}\times10^{-1}$
6	$\mathbf{2.506}\times10^{1}$	$\mathbf{7.549}\times10^{-1}$

二次元では 2000 個すべてが正準で、外れは倍精度の刻みの桁にとどまる。四次元と六次元では、2000 個のうち一つも正準にならない。いちばん近いものでも外れが $\mathbf{2.158}\times10^{-1}$ ある。

3. 体積を保つだけの写像は、断面をいくらでも潰せる

四次元で、最初の共役な組を $1/k$ 倍し、もう一方を k 倍する写像を取る。行列式は積で 1 になるので、体積はまったく動かない。

倍率	行列式	影の半径	正準からの外れ
1	**1.000000000000**	**1.000000000000**	0.000000
10	**1.000000000000**	**0.100000000000**	99.000000
100	**1.000000000000**	**0.010000000000**	9999.000000
1000	**1.000000000000**	**0.001000000000**	999999.000000

行列式の 1 からの外れは最大でも **1.776**×10⁻¹⁵ で、体積は動いていない。それでも断面は千分の一まで潰せる。倍率 1 のときだけ正準で、そこから離れるほど正準から外れていく。

これが論文135 の検査を通ってしまう例である。ヤコビ行列式が 1 かどうかを見るだけでは、この写像と正準な写像を見分けられない。

4. 正準な写像は、断面を潰せない

でたらめな正準写像を 20000 個作り、単位球の影の半径を測った。作り方は、回転・ずらし・伸び縮みという基本的な正準写像を四つ掛け合わせるものである。

量	値
作った数	20000
正準からの外れの最大（道具の確かめ）	**5.481**×10⁻¹⁰
影の半径の最小	**1.000000000000**
影の半径の最大	**1.684915**×10⁴
半径が 1 を下回った回数	0

一つも 1 を下回らない。しかも最小はちょうど 1 に届いており、下限は達成される。半径は上へはいくらでも伸びる。

下限を取る例は素朴である。二つの共役な組を同じ角だけ回す写像では、影の半径は **1.000000000000**、正準からの外れは **2.085**×10⁻¹⁷ である。

伸び縮みの正準写像では、半径が倍率そのものになる。

倍率	影の半径	正準からの外れ
1	**1.000000000000**	0.000e+00
2	**2.000000000000**	0.000e+00
5	**5.000000000000**	0.000e+00
10	**10.000000000000**	0.000e+00

前節の写像は、同じ倍率を二つの組の間で分けていた。正準な写像は、同じ組の中で分ける。片方を縮めたぶん、必ずもう片方が伸びる。

5. なぜ 1 を下回れないのか

理由は一行で書ける。影を作るのは、写像の行列のうち最初の位置と最初の運動量に当たる二行である。正準な写像では、この二行の組に対する反対称形の値がちょうど 1 になる。

5000 個で測ると、この値は最小 **0.999999999996**、最大 **1.000000000003** であった。

すると、1 はその二行の長さの積を超えられず、長さの積は最大特異値の二乗を超えられない。したがって最大特異値は 1 以上になる。二行の長さの積の最小は実測で **1.000000000000** で、この不等式は端で締まっている。

行列式が 1 であることは、この二行に何も課さない。縛っているのは反対称形のほうである。

6. 同じ体積でも、潰せなさは違う

写像ではなく形について測る。四次元の楕円体を取り、行列式を固定したまま形を変える。体積は行列式だけで決まるので動かないが、潰せなさは動く。

径数	行列式	体積の比	ウィリアムソンの固有値	容量の比
1	**1.000000000000**	**1.000000000000**	1.000000, 1.000000	**1.000000000000**
2	**1.000000000000**	**1.000000000000**	0.500000, 2.000000	**0.500000000000**
5	**1.000000000000**	**1.000000000000**	0.200000, 5.000000	**0.200000000000**
10	**1.000000000000**	**1.000000000000**	0.100000, 10.000000	**0.100000000000**

体積の比は 1 のまま動かず（外れの最大 **4.441×10⁻¹⁶**）、容量の比は十分の一まで下がる。容量の比はちょうど径数の逆数で、閉じた形との外れは最大 **1.110×10⁻¹⁶** である。球のときは二つの固有値がどちらも 1 になる（対照）。

体積は二つの固有値の積で決まり、潰せなさは大きいほうだけで決まる。積を保ったまま二つを引き離せば、体積は動かずに潰せなさだけが落ちる。

7. 分離子：動かすのが体積か、断面の面積か

同じ「体積を保つ」という札の下に、二つの別の集まりがある。

写像	体積の比	影の半径
体積を保つだけ（倍率 1000）	**1.000000000000**	**0.001000000000**
正準（でたらめに一つ）	**1.000000000000**	**8.808319352853**

体積の比を見ても二つは区別できない。影の半径を見れば分かれる。これが本稿の分離子である。

そして二次元では、この分離子が働かない。共役な組が一つしかないと、断面の面積と体積が同じものになってしまうからである。分離子が意味を持つのは四次元からである。

体積と容量を同根とは呼ばない。第6節のとおり、体積を固定したまま容量だけを動かせるので、論文300 の規律では同じ源を持つとは書けない。

8. 既刊との関係

論文77 は、ハミルトン流が位相空間の体積を保つことを扱った——本稿はその保存を前提として受け取り、保存だけでは潰せなさが決まらないことを数えた。

論文135 は、数値解法のヤコビ行列式がちょうど 1 になることを測った——第3節の写像は、その検査を通りながら正準ではない例である。

論文81 は、微視の状態がいつか戻ってくることを扱った——本稿はいつ戻るかには触れない。

論文76 は、位相空間に共変な形で構造を置いた——本稿が数えたのは、その構造を保つ写像と体積だけを保つ写像の自由度の差である。

論文300 は同根か別根かは判定できると示した——その規律に従い、体積と容量を同根とは呼ばない。

結び

結び：体積を保つことと潰せないことは、四次元から別々になる。二次元でだけ二つは同じものになる——自由度の差は 0・5・14・27・44 で、0 になるのは共役な組が一つのときだけである。でたらめに作っても同じ——二次元では外れが最大 2.642×10^{-14}、四次元では最小でも 2.158×10^{-1} ある。体積を保つだけなら断面はいくらでも潰せる——行列式 1.000000000000 のまま影の半径は 0.001000000000 になる。正準な写像は潰せない——20000 個のうち 1 を下回ったものは 0 個で、最小は 1.000000000000、最大は 1.684915×10^{4} であった。下限は一行で出る——反対称形の値がちょうど 1 で（実測 0.999999999996 から 1.000000000003）、二行の長さの積はそれを下回れない。同じ体積でも潰せなさは違う——体積の比は 1.000000000000 のまま、容量の比は 0.100000000000 まで下がる。正直に書く——定理を証明せず、線形写像の集まりだけを測った。曲がった写像にも回帰時間にも立ち入らない。分離子——動かすのが体積か、断面の面積か。体積の比では二つが区別できず、影の半径では分かれる。

参考文献

1. Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer.
2. Gromov, M. (1985). Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*.
3. Hofer, H., & Zehnder, E. (1994). *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser.
4. McDuff, D., & Salamon, D. (2017). *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press.
5. Williamson, J. (1936). On the Algebraic Problem Concerning the Normal Forms of Linear Dynamical Systems. *American Journal of Mathematics*.
6. 山岸勇輝 (2026).『位相空間 T^*M における速度空間曲率と時空計量の共変的シンプレクティック構造』[論文76]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21722145
7. 山岸勇輝 (2026). *リウヴィルと時間の矢* [論文77]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21722473
8. 山岸勇輝 (2026). *ポアンカレ回帰定理と時間の矢* [論文81]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21733062
9. 山岸勇輝 (2026). *体積か、エネルギーか——両方は取れない* [論文135]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22081063
10. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)