

ばねの楕円を二乗すると、ケプラーの楕円になる

— 閉じる二つの軌道は一つの写像でつながるが、写るのは形で、時間は測り直さないと写らない —

分離子は、写すのが軌道の形か、時間の刻みか — [論文1072]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1072>

— From thinking to syncing. —

要旨

軌道がいつも閉じる中心力は、逆二乗の引力とばねの力の二つしかない（ベルトランの定理）。本稿は、この二つが平面では一つの写像でつながることを数で確かめる。平面を複素数で表し、ばねの軌道を二乗すると、ケプラーの軌道になる。これはボーリン（1911）とカスナー（1913）の結果で、アーノルドが本（1990）で紹介した。新しい定理も法則も主張しない。第一に、これが本稿の芯である。中心が原点のばねの楕円を二乗すると、焦点が原点の楕円になる。半径 2 と 1 の楕円は、長半径 **2.500000**・離心率 **0.600000** の楕円に写り、二つの焦点からの距離の和の散らばりは、試した四つの楕円で最大 **1.421×10^{-14}** である。ばねが一周するあいだに、写った点は原点のまわりを二周する。第二に、時間は測り直さないと写らない。元の時間のままでは面積速度が **2.000000** から **8.000000** まで動くが、時間の刻みを原点からの距離の二乗で伸ばすと、散らばりは **2.072×10^{-15}** まで消える。そのとき、ばねの強さがケプラーのエネルギーに、ばねのエネルギーがケプラーの結合の強さに入れ替わる。第三に、力の冪は $(a+3)(A+3)=4$ で組になる。冪 a の力の軌道を、冪 $(a+3)/2$ の写像で写した曲線から、その曲線を軌道にする中心力を逆算すると、七つの冪すべてで予言どおりの冪になった。ばねの +1 は **-2.000000000** に、一定の力の 0 は **-1.666666667** に写り、冪を 0.1 ずらすと散らばりは **1.383×10^{-2}** 以上に跳ね上がる。第四に、自分自身に写る冪は二つで、相手の無い冪が一つある。距離に反比例する力（写像は何もしない）と、距離の五乗に反比例する力（写像は反転）が自分自身に写り、距離の三乗に反比例する力では写像の冪が 0 になって相手が無い。第五に、衝突は、ばねの側ではただの原点の通過である。ばねの楕円を細くすると、写ったケプラーの楕円の離心率は **0.999950001** まで 1 に寄り、最大の速さは 400 まで発散するのに、ばねの速さは 2 のままである。潰れきると、ケプラーの側は太陽に落ちて跳ね返る運動になり、速さに距離の平方根を掛けた量は **4.000000000** に落ち着く。第六に、保存量は、角が二倍になって写る。ばねの保存量の主軸の角を 0.3 とすると、ケプラーの近点の向きは **3.741592654** で、 π に角の二倍を足した値に一致する。正直に書くと、ここで示すのは平面の話である。三次元への広げ方と、量子の話には立ち入らない。キーワード：ばねの楕円、ケプラーの楕円、平方の写像、ベルトランの定理、時間の付け替え、衝突の正則化、力の冪の対応、分離子。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。ベルトランの定理、ばねとケプラーの軌道が平方の写像でつながること（ボーリン・カスナー・アーノルド）、衝突の正則化（レヴィ＝チヴィタ）は、いずれも既知である。扱うのは平面だけである。三次元へ広げる変換（クスタンハイモとシュティーフェル）には立ち入らない。量子の話をしていない。水素原子と振動子の対応には触れない。対称性の群を写さない。示すのは保存量の向きが写ることまでで、群どうしの関係は論じない。同根と呼ばない。形は一つの写像でつながるが、時間と保存量は測り直さないと写らないからである。数値積分を証明と書かない。冪の対応は、数値で解いた軌道から逆算して確かめるまでである。既刊との関係：論文1002の射程注記「衝突の正則化や衝突のあとの運動は扱わない」の席に、本稿は座る（先客なし）。論文79は、軌道が閉じる中心力は逆二乗とばねの二つで、両者の隠れた対称性は別だと書いた。ここではその二つが、平面では形の上で一つの写像でつながることを示す。対称性が別であることは崩さない。論文01は、流れが半径によらず一定になるのは二乗の逆数のときだけだと示した。ここではその逆二乗が、ばねの写像の先に現れる。論文258は、源の次元を一つ上げると逆数が対数になることを示した。ここでは平面の点の源の力にあたる、距離に反比例する力が、写像で自分自身に写ることを見る。論文68は、ボルン則の2とホップ写像の2を点呼した。ここでの平方の写像も二対一で、三次元へ広げる変換はホップ写像を使うが、そこには立ち入らない。論文300は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、形だけがつながる二つを同根とは呼ばない。加えたのは、二乗した楕円の焦点が原点に来ることを数で確かめたこと、時間の付け替えでエネルギーと結合の強さが入れ替わることを測ったこと、力の冪の対応を七つの冪で逆算したこと、衝突がばねの側では原点の通過になることを数で示したこと、保存量の向きが角の二倍で写ることを測ったことである。

1. 問いと答えの形

中心に向かう力のうち、有界な軌道がいつも閉じるのは、距離の二乗に反比例する引力と、距離に比例するばねの力の二つだけである。これがベルトランの定理（1873）である。論文79は、この二つが閉じる理由はそれぞれ別の隠れた対称性にあると書いた。

では、二つはまったく無関係なのか。平面では、そうではない。平面の点を複素数 z で表し、ばねの軌道を $w = z^2$ で写すと、ケプラーの軌道になる。この対応はボーリン（1911）とカスナー（1913）にさかのぼり、アーノルドが本『Huygens and Barrow, Newton and Hooke』（1990）で紹介した。ニーダム（1993）は、一般の冪の力どうしの対応として整理している。

本稿はこの対応を、写るものと写らないものに分けて数で確かめる。写るのは軌道の形である。時間は測り直さないと写らない。エネルギーと力の強さは役を入れ替え、保存量は向きの角が二倍になって写る。

2. 二乗すると、焦点が原点に来る

ばねの力 $-kz$ のもとでの軌道は、中心が原点の楕円 $z = a \cos \tau + ib \sin \tau$ である。これを二乗すると

$$w = z^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2}{2} \cos 2\tau + i ab \sin 2\tau$$

となり、中心が $(a^2 - b^2)/2$ 、長半径 $(a^2 + b^2)/2$ 、短半径 ab の楕円になる。中心から焦点までの距離は $(a^2 - b^2)/2$ なので、一つの焦点がちょうど原点に来る。

四つの楕円で確かめた。二つの焦点（原点と $a^2 - b^2$ ）からの距離の和が一定かを、一周を 20 万点に分けて測った。

$a \cdot b$	長半径	短半径	離心率	距離の和の散らばり	近点・遠点
2・1	2.500000	2.000000	0.600000	3.553×10^{-15}	1.000000・4.000000
3・0.5	4.625000	1.500000	0.945946	1.421×10^{-14}	0.250000・9.000000
1.5・1.2	1.845000	1.800000	0.219512	4.441×10^{-15}	1.440000・2.250000
1・1	1.000000	1.000000	0.000000	1.554×10^{-15}	1.000000・1.000000

近点は b^2 、遠点は a^2 で、離心率は $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ である。円は円に写る。二乗は角度を二倍にするので、ばねが一周するあいだに、写った点は原点のまわりを 2.000000 周する。

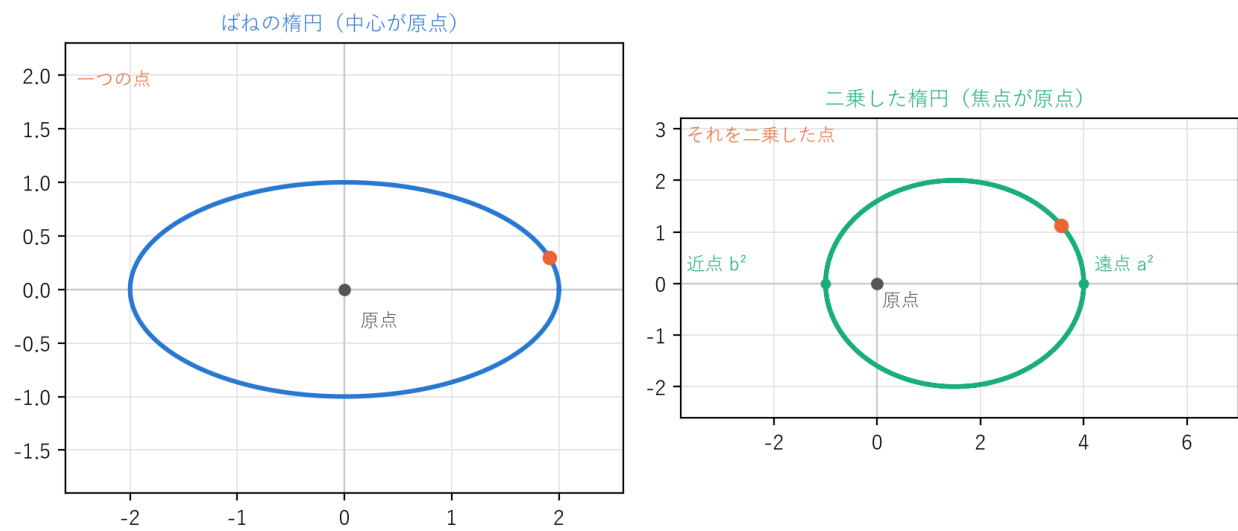


図1：左はばねの楕円（半径 2 と 1、中心が原点）、右はそれを二乗した楕円（焦点が原点）。左の点を二乗すると右の点に写る。近点は $b^2 = 1$ 、遠点は $a^2 = 4$ である。

3. 時間は測り直さないと写らない

形は写ったが、動きの速さは写らない。ばねの元の時間 τ のまま、写った点の面積速度（原点から見て単位時間に掃く面積）を測ると一定にならない。ケプラーの第二法則が成り立つのは、時間の刻みを $dT = |z|^2 d\tau$ と、原点からの距離の二乗で伸ばしたときである。

そのとき、ケプラーの側のエネルギーは $-2k$ 、結合の強さ（太陽の質量にあたる量）は $4h$ になる。 k はばねの強さ、 h はばねのエネルギーである。ばねの強さがエネルギーに、ばねのエネルギーが力の強さに、役を入れ替える。

$a \cdot b \cdot k$	元の時間の面積速度	新しい時間の散らばり	エネルギー	結合の強さ	周期
$2 \cdot 1 \cdot 1$	2.000000~8.000000	1.776×10^{-15}	-2.000000000	10.000000	7.853981634
$2 \cdot 1 \cdot 2$	2.828427~11.313708	1.570×10^{-15}	-4.000000000	20.000000	5.553603673
$3 \cdot 0.5 \cdot 1$	0.375000~13.500000	2.072×10^{-15}	-2.000000000	18.500000	14.529866023

周期は、新しい時間でばねの半周期ぶんを積んだ値で、ケプラーの第三法則の $2\pi\sqrt{A^3/\mu}$ と、印字した九桁まで一致した。エネルギーの散らばりは最大 2.416×10^{-13} である。形はそのまま写るのに、時間は距離の二乗で伸ばさないと写らない。ここが本稿の分離子になる。

4. 力の冪は $(a+3)(A+3)=4$ で組になる

ばねとケプラーは、もっと大きな対応の一組である。力が距離の a 乗に比例する軌道を $w = z^\alpha$ 、 $\alpha = (a+3)/2$ で写すと、力が距離の A 乗に比例する軌道になり、

$$(a+3)(A+3) = 4$$

が成り立つ（ニーダム 1993 のいうカスナー＝アーノルドの定理）。ばねは $a = 1$ 、写像は二乗、相手は $A = -2$ である。

これを逆算で確かめた。冪 a の力の軌道を数値で解き、写した曲線 $R(\Phi)$ について、その曲線を軌道にする中心力をビネの式 $F = L^2 u^2 (u'' + u)$ ($u = 1/R$) から出す。微分は差分でとらず、軌道の位置と速度から直接計算した。力が R^A に比例していれば、 F/R^A は軌道の上で一定になる。

元の冪 a	写像の冪	予言 A	測った傾き	F/R^A の散らばり	冪を 0.1 ずらすと
+2	2.50	-2.200000	-2.200000000	4.201×10^{-13}	4.635×10^{-2}
+1	2.00	-2.000000	-2.000000000	6.590×10^{-13}	7.394×10^{-2}
0	1.50	-1.666667	-1.666666667	2.215×10^{-12}	7.115×10^{-2}
-0.5	1.25	-1.400000	-1.400000000	2.158×10^{-12}	6.919×10^{-2}
-1	1.00	-1.000000	-1.000000000	2.635×10^{-12}	4.262×10^{-2}
-2	0.50	+1.000000	+1.000000000	9.463×10^{-12}	3.841×10^{-2}
-5	-1.00	-5.000000	-5.000000000	3.997×10^{-13}	1.383×10^{-2}

七つの冪すべてで、 F/R^A の散らばりは最大 9.463×10^{-12} にとどまり、冪を 0.1 ずらすと最小でも 1.383×10^{-2} に跳ね上がる。どの軌道も円ではなく、 R は 1.147 倍から 2.041 倍の幅を動く。ケプラーの $a = -2$ を平方根で写すと、ばねの $A = +1$ に戻る。

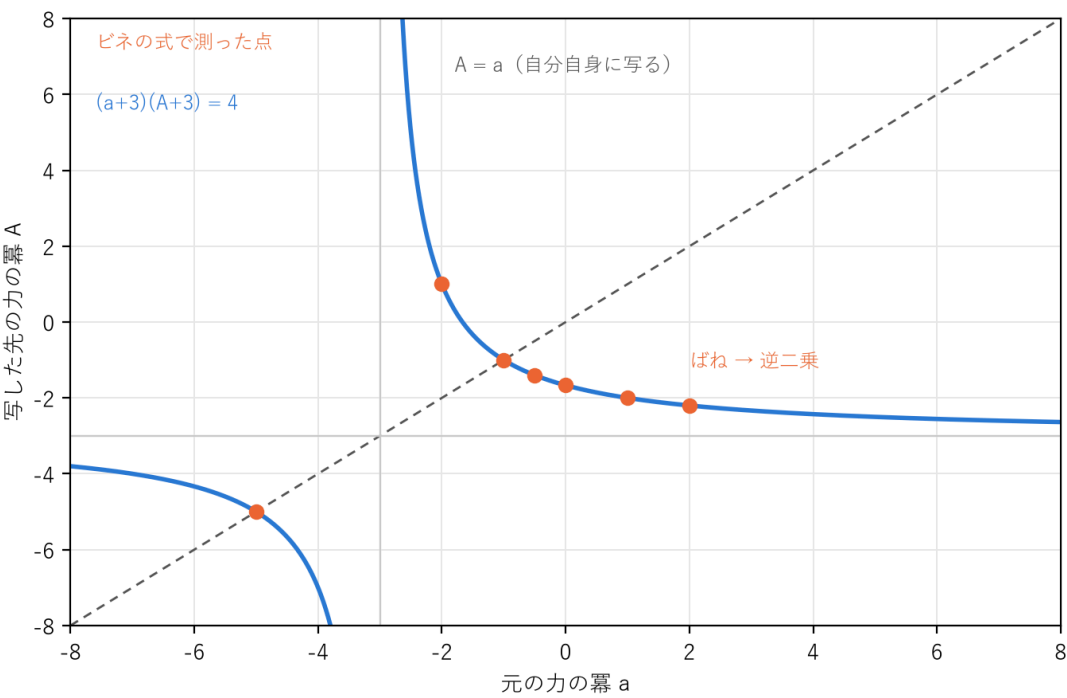


図2：力の冪の対応。青の曲線が $(a+3)(A+3) = 4$ 、橙の点が検算でビネの式から測った冪、点線が自分自身に写る $A = a$ 。灰色の縦横の線は相手の無い冪 -3 。

5. 自分自身に写る冪と、相手の無い冪

対応は入れ替えて、二度写すと元に戻る。

a	相手 A	写像の冪 $(a+3)/2$
+7	-2.600000	5.000
+2	-2.200000	2.500
+1	-2.000000	2.000
+0.5	-1.857143	1.750
0	-1.666667	1.500
-0.5	-1.400000	1.250
-1	-1.000000	1.000
-2	+1.000000	0.500
-2.5	+5.000000	0.250
-5	-5.000000	-1.000

自分自身に写るのは、 $(a+3)^2=4$ を満たす $a=-1$ と $a=-5$ の二つである。 $a=-1$ では写像の冪が 1 で、写像は何もしない。これは平面で点の源が作る力の形で、論文258 が、源の次元を一つ上げると逆数が対数になると示した先にいる。 $a=-5$ では写像の冪が -1 で、写像は原点についての反転 $w=1/z$ になる。反転で写しても、距離の五乗に反比例する力の軌道は同じ種類の軌道に戻る。

$a=-3$ 、つまり距離の三乗に反比例する力では、写像の冪が 0 になり、写像が潰れる。この力には相手が無い。正の大きな冪ほど相手は -3 に近づき、-3 より少しだけ小さい冪ほど相手は大きな正の冪になる。

6. 衝突は、ばねの側ではただの原点の通過である

論文1002 は、三体が衝突に近づくところで積分を止め、衝突の正則化は扱わなかった。平面の二体の衝突では、正則化はまさにこの写像である（レヴィ＝チヴィタ 1920）。

ばねの楕円を細くしていく。半径 $a=2$ のまま b を小さくすると、写ったケプラーの楕円は離心率が 1 に寄り、近点で速さが発散する。ところが、ばねの側の最大の速さは a のままである。

b	離心率	近点の距離	ケプラーの最大の速さ	ばねの最大の速さ
1.00	0.600000000	1.000000	4.000	2.000
0.30	0.955990220	0.090000	13.333	2.000
0.10	0.995012469	0.010000	40.000	2.000
0.01	0.999950001	0.000100	400.000	2.000

$b = 0$ まで潰すと、ばねは原点を通る直線の往復 $z = 2 \cos \tau$ になる。写った運動は $w = 4 \cos^2 \tau$ で、実軸の正の側だけを動き、原点に落ちて跳ね返る。原点の近く（距離 10^{-6} 未満）で、ケプラーの速さに距離の平方根を掛けた量は 3.999999508 から 4.000000000 にあり、エネルギーの保存から出る $\sqrt{2\mu} = 4.000000000$ に落ち着く。速さは距離の平方根の逆数で発散する。それでも、ばねの側では速さ 2 で原点を通り過ぎるだけで、何も特別なことは起きない。衝突の特異点は、写像の側に押しつけられている。

7. 保存量は、角が二倍になって写る

ケプラーの軌道には、近点の向きを指すラプラス–ルンゲ–レンツ・ベクトルが保存する。ばねの軌道には、楕円の軸の向きを表す二階のテンソル $T_{ij} = \dot{z}_i \dot{z}_j + k z_i z_j$ （フラドキンのテンソル）が保存する。ばねの楕円を角 ψ だけ回して写すと、ケプラーの近点は $\pi + 2\psi$ の向きに来る。

回した角 ψ	ばねの主軸の角	ケプラーの近点の向き	$\pi + 2\psi$
0.00	0.000000000	3.141592654	3.141592654
0.30	0.300000000	3.741592654	3.741592654
1.00	1.000000000	5.141592654	5.141592654
2.50	2.500000000	1.858407346	1.858407346

二つの保存量はどちらも軌道の上で一定で、ずれは最大でばねの側 3.55×10^{-15} 、ケプラーの側 2.56×10^{-14} である。ベクトルの大きさを結合の強さで割ると 0.600000000 で、離心率そのものになる。保存量は、向きの角を二倍にして写る。ただし写るのは向きまでで、二つの保存量が属する群どうしの関係には、本稿は立ち入らない。

8. 分離子：写すのが軌道の形か、時間の刻みか

写像は形をそのまま運ぶ。楕円は楕円に、中心は焦点に、角は二倍の角に写る。だが時間の刻みは運ばない。面積速度が一定になるのは、刻みを原点からの距離の二乗で伸ばしたときだけで、元の時間のままでは面積速度が4倍以上動く。そして時間を測り直すと、ばねの強さとエネルギーが、ケプラーのエネルギーと力の強さに役を入れ替える。

分離子は、写すのが軌道の形か、時間の刻みかである。形はつながり、時間とエネルギーの役はつながらない。だから論文79の「二つの閉じる力は別の対称性で閉じる」と、本稿の「平面では一つの写像でつながる」は両立する。

9. 既刊との関係

論文1002の射程注記「衝突の正則化や衝突のあとの運動は扱わない」の席に、本稿は座る（先客なし）。第6節で、平面の二体の衝突がばねの側ではただの原点の通過になることを数で示した。

論文79は、軌道が閉じる中心力は逆二乗とばねの二つで、両者の隠れた対称性は別だと書いた。ここではその二つが、平面では形の上で一つの写像でつながることを示した。対称性が別であることは崩していない。

論文01は、流れが半径によらず一定になるのは二乗の逆数のときだけだと示した。ここではその逆二乗の力が、ばねを二乗した先に現れた。

論文258は、源の次元を一つ上げると逆数が対数になることを示した。ここでは平面の点の源の力にあたる、距離に反比例する力が、写像で自分自身に写った（第5節）。

論文68は、ボルン則の2とホップ写像の2を点呼した。ここでの平方の写像も二対一で、 z と $-z$ が同じ点に写る。三次元へ広げる変換はホップ写像を使うが、本稿は平面にとどまる。

論文300は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、形だけがつながり時間とエネルギーの役がつながらない二つを、同根とは呼ばない。

結び

結び：ばねの楕円を二乗すると、ケプラーの楕円になる。中心が原点の楕円は、焦点が原点の楕円に写る。半径2と1の楕円は長半径 **2.500000**・離心率 **0.600000** の楕円になり、距離の和の散らばりは最大 **1.421×10^{-14}** である。時間は測り直さないと写らない。面積速度は元の時間では **2.000000** から **8.000000** まで動き、刻みを距離の二乗で伸ばすと散らばりは **2.072×10^{-15}** になる。ばねの強さとエネルギーは、ケプラーのエネルギーと力の強さに役を入れ替える。力の冪は $(a+3)(A+3)=4$ で組になる。七つの冪で逆算した冪は予言どおりで、ばねの+1は **-2.0000000000** に写る。衝突は、ばねの側ではただの原点の通過である。ケプラーの速さに距離の平方根を掛けた量は **4.0000000000** に落ち着き、ばねの速さは2のままである。保存量は角が二倍になって写る。近点の向きは **3.741592654** で、 π に角の二倍を足した値である。正直に書くと、平面の話であり、三次元への

広げ方と量子の話には立ち入らない。分離子は、写すのが軌道の形か、時間の刻みか。形はつながり、時間とエネルギーの役はつながらない。

参考文献

1. Arnold, V. I. (1990). *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*. Birkhäuser.
2. Bertrand, J. (1873). Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*.
3. Bohlin, K. (1911). Note sur le problème des deux corps et sur une intégration nouvelle dans le problème des trois corps. *Bulletin astronomique*.
4. Kasner, E. (1913). *Differential-Geometric Aspects of Dynamics*. American Mathematical Society Colloquium Publications.
5. Kustaanheimo, P., & Stiefel, E. (1965). Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.
6. Levi-Civita, T. (1920). Sur la régularisation du problème des trois corps. *Acta Mathematica*.
7. Needham, T. (1993). Newton and the Transmutation of Force. *The American Mathematical Monthly*.
8. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理. [論文01]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1> ・ DOI: 10.5281/zenodo.21403186
9. 山岸勇輝 (2026). Hopf 束としての量子ビット [論文68]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/68> ・ DOI: 10.5281/zenodo.21642238
10. 山岸勇輝 (2026). $n=2$ の隠れた対称性 [論文79]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/79> ・ DOI: 10.5281/zenodo.21732820
11. 山岸勇輝 (2026). 4π が出るのは、源が点のときだけである [論文258]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/258> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22169011
12. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
13. 山岸勇輝 (2026). 三体の慣性モーメントは 4 次元でだけ放物線を描き、回る正三角形はそこでエネルギー 0 になる [論文1002]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1002> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22823542

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)