

面積と流束を保つ写像の不動点は、関数の臨界点と同じ床を持つ

— トーラスの上でレフシェッツ数が 0 で黙るところ、二つを保てば不動点はいつも四つ以上ある —
分離子は、写像が一つの関数の流れから来るかどうか — [論文1073]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1073>

— *From thinking to syncing.* —

要旨

ドーナツの表面（トーラス）を自分自身に写す写像は、恒等写像に連続につながっていれば、レフシェッツ数が 0 になる。その 0 は、不動点が全部の点でも一つも無くても同じで、不動点の数について何も言わない（論文161）。一方、トーラスの上の関数の臨界点には床があり、少なくとも 4 つある（論文203）。アーノルド（1965）は、面積を保ち、平均のずれ（流束）が 0 の写像は、関数と同じ床を持つと予想した。トーラスではコンリーとツェンダー（1983）が示した。本稿はそれを数で確かめる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、これが本稿の芯である。面積と流束を保つ写像は、不動点がいつも四つ以上ある。四方向のずらしを重ねた写像 60 個で、不動点の数は 4 から 26 まで動き（平均 **13.833**）、退化していないものが 4 を割ることは一度も無かった。指数の和はいつも 0 で、数はいつも偶数である。第二に、振れ幅が小さいと、写像の不動点は関数の臨界点に重なる。ずらしを生む関数の臨界点の数と写像の不動点の数は、八つの関数すべてで等しく、隔たりは振れ幅を半分にするたびに半分に近づく（最後の比は **1.912** から **2.004**）。第三に、流束を足すと床が消える。面積を保ったまま平均のずれを足していくと、不動点は 6 から 4、2 と減り、ずれ **0.30** で 0 になる。指数の和は 0 のままである。第四に、面積を外しても床が消える。平均のずれは 0 のまま、向きが回る押しを足して面積を保たなくすると、押し **0.10** で不動点が一つも無い写像が現れる。そのとき面の伸び縮みの倍率は **0.372** から **1.628** で、面を折り返してはいない。正直に書くと、見込みが二つ外れた。隔たりの比が 2 に寄るのが遅い関数があり、その理由を臨界点が退化に近いからと見込んだが、当たらなかった。理由は測っていない。キーワード：不動点、レフシェッツ数、アーノルド予想、面積を保つ写像、流束、臨界点、トーラス、分離子。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。レフシェッツの不動点定理、モースの不等式、アーノルド予想とそのトーラスでの証明（コンリー＝ツェンダー）は、いずれも既知である。予想を証明しない。示すのは、作った写像で床が破れないことを数えるまでである。トーラスだけを扱う。高い次元と一般の曲面には広げない。フレアーの理論に立ち入らない。一般の場合の証明の道具には触れない。退化した不動点を数えない。退化を許すと床は3に下がるが、本稿は退化していない場合だけを数える。理由を推測で書かない。隔たりの比が遅く2に寄る関数の理由は、見込みが外れたので書かない。既刊との関係：論文161は、トーラスの上で恒等写像も回転もレフシェッツ数が0で、その0は不動点の有無について何も言わないことを示した。ここでは、面積と流束の二つを保つと、その沈黙の中に床4が現れることを数える。論文203は、トーラスの上の関数の臨界点の数は大きく動くが、交代和はいつも0で、床は4だと示した。ここでは、写像の不動点が関数の臨界点に重なることを振れ幅を小さくして測り、写像の側にも同じ床があることを示す。論文1070は、体積を保つことと潰せないことが四次元から別々になると示した。ここでは二次元で、面積を保つことに流束0を足すと不動点の床が決まることを見る。論文128は、指数の総和がオイラー標数になることを扱った。ここでの指数の和0は、恒等写像につながる写像のレフシェッツ数で、トーラスのオイラー標数0に等しい。論文300は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、面積を外しても流束を外しても指数の和は動かず床だけが消えるので、床と指数の和を同根とは呼ばない。加えたのは、四方向のずらしで作った写像で床4が破れないことを数えたこと、不動点と臨界点の隔たりが振れ幅に比例して縮むことを測ったこと、流束と面積のどちらを外しても床が消えることを並べたこと、外れた見込みを記録したことである。

1. 問いと答えの形

ドーナツの表面（トーラス）の点を、同じトーラスの点へ写す写像を考える。写像で動かない点が不動点である。恒等写像に連続につながる写像では、不動点の指数の和（レフシェッツ数）はいつも0になる。論文161は、恒等写像（全部の点が不動）と回転（不動点の一つも無い）がどちらもレフシェッツ数0であることを示し、この0は不動点の数について何も言わないと書いた。

一方、トーラスの上の関数には、極小・鞍・極大の臨界点が必ずある。論文203は、その数が大きく動くのに交代和はいつも0で、退化していない場合の床は4（トーラスのベッチ数の和 $1+2+1$ ）だと示した。

アーノルド（1965）は、この二つの間に線を引いた。面積を保ち、平均のずれ（流束）が0の写像、つまり一つの関数の流れから来る写像は、不動点について関数の臨界点と同じ床を持つ、という予想である。トーラスではコンリーとツェンダー（1983）が示した。本稿はこれを数で確かめ、二つの条件のどちらを外しても床が消えることを並べる。

2. 写像の作り方

トーラスを周期的な正方形で表す。向き $d = (d_1, d_2)$ に沿った「ずらし」は、横切る座標 $s = d_2x - d_1y$ の関数 $h(s)$ の分だけ点を d の向きに動かす： $p \mapsto p + \varepsilon h(s)d$ 。 h の平均が0なら平均のずれ（流束）は0で、ヤコビ

行列の行列式はちょうど 1 になり、面積を保つ。

四つの向き $(1, 0) \cdot (0, 1) \cdot (1, 1) \cdot (1, -1)$ のずらしを、それぞれでたらしめ関数で重ねる。重ねても面積と流束は保たれ、行列式と 1 のずれは最大 8.882×10^{-16} であった。このずらしを生む関数は $K = \sum_k \Phi_k(s_k)$ ($\Phi'_k = -h_k$) で、振れ幅 ε が小さいと写像は K の流れに近い。

向きを二つにしなかったのには理由がある。横と縦の二つだけだと、不動点は横の関数の零点と縦の関数の零点の組になり、平均 0 の関数は零点を 2 つ以上持つので、四つ以上は数えなくても分かってしまう。四つの向きを重ねると、その組の形が崩れる。不動点は、全部の出発点からニュートン法を回して探した。

3. 面積と流束を保つと、不動点はいつも四つ以上

振れ幅 $\varepsilon = 0.06$ の写像を 60 個作り、不動点を数えた。

不動点の数	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
写像の個数	2	1	7	12	10	5	6	7	4	1	2	3

不動点の数は 4 から 26 まで動き、平均は **13.833** であった。退化していない不動点が 4 を割った写像は一つも無い。指数の和がとった値は 0 だけで、指数 +1 と -1 の不動点はいつも同じ数あり、数はいつも偶数である。論文203 の関数の臨界点と同じく、数は大きく動くが、交代和は動かず、床は 4 にある。

見落としを確かめるため、写像 10 個について、出発点の格子を 40×40 と 80×80 にして探した。10 個とも数は同じであった (14 から 26 個)。

4. 振れ幅が小さいと、不動点は臨界点に重なる

写像が「関数の流れから来る」ことを、直接確かめる。八つのでたらしめ関数 K について、その臨界点を探し、同じ関数から作った写像の不動点と比べた。振れ幅は 0.004 から半分ずつ 0.000125 まで下げた。

関 数	臨界点（極 値・鞍）	ヘッセ行列 式の最小	隔たり （0.004）	隔たり （0.000125）	最初の 比	最後の 比	0.06 で	0.25 で
1	18（9・9）	10.844	3.467×10^{-3}	1.005×10^{-4}	2.086	2.004	16	24
2	12（6・6）	26.945	1.233×10^{-2}	6.669×10^{-4}	1.679	1.912	12	12
3	12（6・6）	17.587	4.559×10^{-3}	1.518×10^{-4}	1.934	1.996	12	14
4	34（17・17）	102.728	4.668×10^{-3}	1.477×10^{-4}	1.987	1.999	34	30
5	22（11・11）	103.356	2.810×10^{-3}	8.801×10^{-5}	1.998	2.000	22	22
6	8（4・4）	161.100	4.608×10^{-3}	1.445×10^{-4}	1.996	2.000	8	14
7	10（5・5）	22.734	4.213×10^{-3}	1.302×10^{-4}	2.011	2.001	12	8
8	12（6・6）	41.853	2.447×10^{-3}	7.673×10^{-5}	1.996	2.000	12	12

振れ幅 0.004 から 0.000125 までの六段すべてで、不動点の数は臨界点の数と等しかった。隔たりは振れ幅を半分にするたびに半分に近づき、最後の段の比は **1.912** から **2.004** にある。臨界点の極値と鞍はいつも同じ数で、交代和は 0 である。振れ幅を 0.06、0.25 と大きくすると数は変わりうるが、4 を割ることはない。

見込みが一つ外れたことを書いておく。最初は、振れ幅を半分にする最初の二段の比がどれも 1.9 と 2.1 の間に入ると見込んでいたが、関数 2 だけが 1.679 で外れた。関数 2 の比は、振れ幅を下げるたびに 1.679・1.729・1.793・1.858・1.912 と、下から単調に 2 へ近づいた。その理由を、臨界点が退化に近い（ヘッセ行列式が小さい）からと見込んだが、関数 2 のヘッセ行列式の最小 26.945 は八つの中で 4 番目の小ささで、当たらなかった。理由は測っていない。

5. 流束を足すと、床が消える

面積を保ったまま、最後に横向き of 平均のずれ **c** を足す。これは回転（平行移動）の成分で、論文161 の不動点が無い例の側に寄せていくことにあたる。

平均のずれ c	0.00	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30
不動点の数	6	6	6	4	2	2	0

流束が 0 のときは 6 個あった不動点、ずれを足すと 4、2 と減り、0.30 で一つも無くなる。指数の和は、どの段でも 0 のままである。面積を保っていても、流束を持つと床は消える。

6. 面積を外しても、床が消える

今度は流束を 0 のまま、面積を保たなくする。四方向のずらしのあとに、向きが y とともに回る一定の大きさの押し $w(\cos 2\pi y, \sin 2\pi y)$ を足す。押しそのものの平均は $(6.139 \times 10^{-17}, 4.832 \times 10^{-17})$ で、平均のずれは 0 である。だが大きさが一定で向きだけが回るので、どこにも止まる点が無い。

押しの大きさ w	不動点の最小	最大	平均	伸び縮みの倍率（行列式）
0.00	8	24	13.60	1.000～1.000
0.02	6	24	12.70	0.874～1.126
0.05	4	26	11.70	0.686～1.314
0.10	0	16	7.30	0.372～1.628

各段は同じ 20 個の写像である。押し 0.10 で、不動点が一つも無い写像が現れた。そのとき行列式は 0.372 から 1.628 で正のままで、面を折り返してはいない。押しを 0.20 にすると行列式が -0.257 まで下がって面が折り返すので、対照には使わなかった。どの段でも指数の和は 0 である。レフシェッツ数は面積を見ないので、面積を外しても 0 のまま何も言わない。

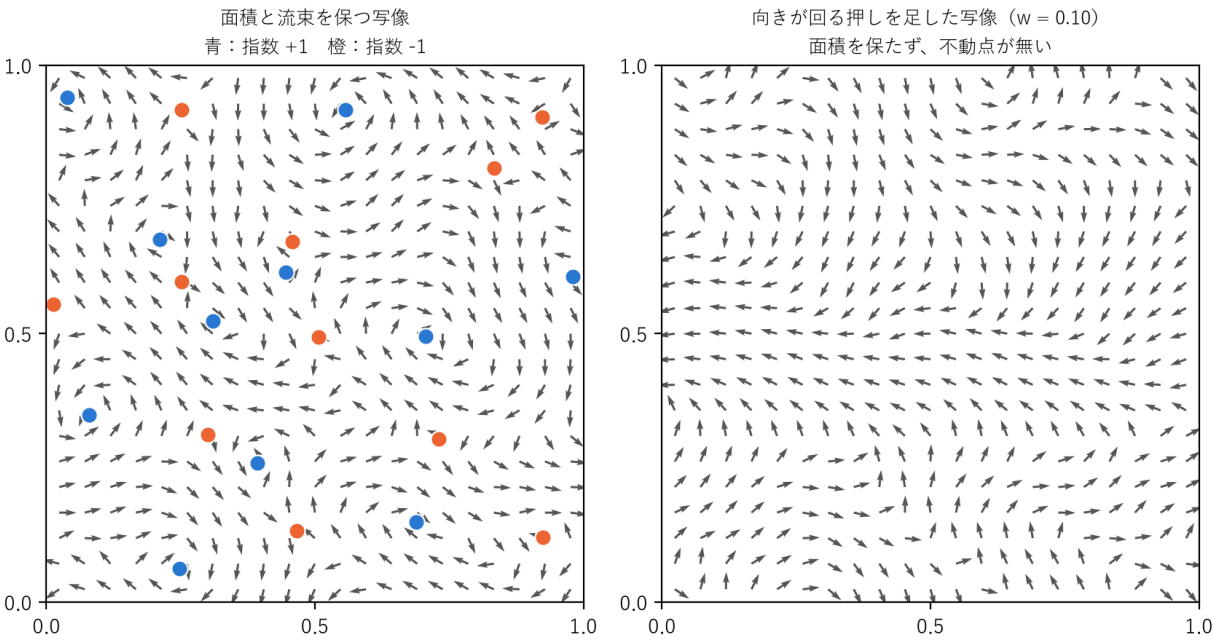


図1：左は面積と流束を保つ写像の不動点（青は指数 $+1$ 、橙は指数 -1 ）と、点の動く向き。右は同じ写像に向きが回る押し（ $w = 0.10$ ）を足したもので、面積を保たず、不動点が一つも無い。

7. 分離子：写像が一つの関数の流れから来るかどうか

三つの場合を並べる。面積と流束の両方を保つ写像は、一つの関数の流れから来る。そのとき不動点は関数の臨界点と同じ床 4 を持つ。流束を足すと、面積を保っていても床は消える。面積を外すと、流束が 0 でも床は消える。どの場合も、レフシェッツ数は 0 で変わらない。

分離子は、写像が一つの関数の流れから来るかどうかである。来るなら不動点は臨界点のようにふるまい、来ないならレフシェッツ数の沈黙に戻る。

8. 既刊との関係

論文161 は、トーラスの上で恒等写像も回転もレフシェッツ数が 0 で、その 0 は不動点の有無について何も言わないことを示した。ここでは、面積と流束の二つを保つと、その沈黙の中に床 4 が現れることを数えた。

論文203 は、トーラスの上の関数の臨界点の数は大きく動くが交代和はいつも 0 で、床は 4 だと示した。ここでは、写像の不動点が関数の臨界点に重なることを振れ幅を小さくして測り、写像の側にも同じ床があることを示した（第4節）。

論文1070 は、体積を保つことと潰せないことが四次元から別々になると示した。ここでは二次元で、面積を保つだけでは足りず、流束 0 を足して初めて不動点の床が決まることを見た。

論文128 は、指数の総和がオイラー標数になることを扱った。ここでの指数の和 0 は、恒等写像につながる写像のレフシェッツ数で、トーラスのオイラー標数 0 に等しい。

論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、面積を外しても流束を外しても指数の和は動かず床だけが消えるので、床と指数の和を同根とは呼ばない。

結び

結び：面積と流束を保つ写像の不動点は、関数の臨界点と同じ床を持つ。二つを保つ写像 60 個で、不動点は 4 から 26 まで動き（平均 **13.833**）、退化していないものが 4 を割ることは一度も無かった。振れ幅が小さいと、不動点の数は関数の臨界点の数と等しく、隔たりは振れ幅に比例して縮む（最後の比 **1.912** から **2.004**）。流束を足すと、不動点は 6 から 0 まで減る。面積を外すと、押し **0.10** で不動点が無い写像が現れ、伸び縮みの倍率は **0.372** から **1.628** である。レフシェッツ数はどの場合も 0 で、何も言わない。正直に書くと、比が遅く 2 に寄る関数の理由を、臨界点が退化に近いからと見込んだが当たらず、理由は測っていない。予想の証明はしない。分離子は、写像が一つの関数の流れから来るかどうか。来るなら不動点は臨界点のようにふるまい、来ないならレフシェッツ数の沈黙に戻る。

参考文献

1. Arnold, V. I. (1965). Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*.
 2. Conley, C. C., & Zehnder, E. (1983). The Birkhoff--Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. *Inventiones mathematicae*.
 3. Floer, A. (1989). Symplectic fixed points and holomorphic spheres. *Communications in Mathematical Physics*.
 4. McDuff, D., & Salamon, D. (2017). *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press.
 5. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/128> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22079576
 6. 山岸勇輝 (2026). 「不動点」は一つの定理ではない [論文161]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/161> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22092530
 7. 山岸勇輝 (2026). 臨界点の個数は大きく動くのに、交代和だけは一度も動かない [論文203]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/203> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22109443
 8. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
 9. 山岸勇輝 (2026). 体積を保つことと潰せないことは、四次元から別々になる [論文1070]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1070> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22944894
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)