

同じ行列が、連続の上では混ぜ続け、画素の上では必ず絵を元に戻す

— 戻るまでの回数はフィボナッチ数列を画素の数で割った余りの周期で決まり、144 画素なら 12 回
で戻る — 分離子は、座標が分母 N の有理数か、それ以外の点か — [論文1074]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1074>

— *From thinking to syncing.* —

要旨

アーノルドとアヴェズ (1968) は、猫の絵をドーナツの表面 (トーラス) の上で引き伸ばして折り返す写像を描いた。その行列は、論文1053 がタイルの比を出した置換行列と同じものである。本稿は、この一つの行列が、連続の上では絵をどこまでも混ぜるのに、画素の上では必ず元の絵に戻すことを数で確かめ、二つを分けているものを名指す。新しい定理も法則も主張しない。第一に、連続の上では混ぜる。近い二点の隔たりは一步ごとに **2.618034** 倍 (黄金比の二乗) に開き、小さな正方形に集めた 10 万個の点は 8 歩で、100 に分けたどのますにも一様の 1 割以内で入る。第二に、これが本稿の芯である。画素の上では必ず戻る。 $N \times N$ の画素に置いた絵は、有限の回数で元に戻る。その回数は、フィボナッチ数列を N で割った余りの周期 (ピサノ周期) から決まり、 $N=2$ から 300 のすべてで一致した。最も遅くても $3N$ 回で、それは N が $10 \cdot 50 \cdot 250$ のときである。第三に、フィボナッチ数とリュカ数の画素は速く戻る。144 画素の絵は 12 回で、199 画素の絵は 11 回で戻る。画素の数あたりで最も速い三つは $199 \cdot 144 \cdot 288$ である。第四に、戻る理由は、画素の点に分母 N の有理数だからである。写像は有限個の点の並べ替えになり、144 画素では 20736 個の点が 1738 本の輪に分かれ、輪の長さの最小公倍数がちょうど 12 である。第五に、倍精度の計算では戻れない。 $37/250$ は二進数で正確に表せず、丸めのずれが一步ごとに黄金比の二乗の倍で育つ。250 画素の点は 750 回で戻るはずなのに、倍精度では 37 回目に軌道から外れる。桁を増やすとずれる回は桁数に比例して延び、400 桁で 750 回を追いきって戻る。正直に書くと、見込みが三つ外れた。速く戻る N の上位六つがどれもフィボナッチ数かリュカ数だという見込み、ずれる回が見積もりと 3 回以内で合うという見込み、144 画素の絵が 6 回目に逆さまになるという見込みである。キーワード：猫写像、トーラス、画素、ピサノ周期、フィボナッチ数列、ポアンカレの回帰、丸め、分離子。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。猫写像、それが混ぜること、画素の上の周期がピサノ周期から決まること、周期が $3N$ を超えないこと（ダイソンとフォーク 1992）は、いずれも既知である。量子の猫写像を扱わない。画素の上の古典の写像だけを見る。混ぜることを証明しない。点の群れの広がりや二点の隔たりを数えるまでである。周期の公式を導かない。ピサノ周期との関係は、 $N=2$ から 300 で一致を確かめるまでである。理由を推測で書かない。ずれる回が見積もりより 4 から 5 回遅れる理由と、途中で逆さまになる N の規則は、測っていない。既刊との関係：論文1053 は、この行列を置換行列として、タイルの個数の比が黄金比に寄ることを示した。ここでは同じ行列をトーラスの上の写像として、混ぜることと戻ることを数える。論文81 は、微視の状態は必ず戻るが、戻る前に宇宙が終わるほど長くかかると書いた。ここでは状態が有限の画素なら、戻るまでがせいぜい $3N$ 回で、画素の数よりずっと短いことを見る。論文213 は、周期運動はちょうど戻り、準周期運動は決して正確には戻らないが、いくらでも近くへ来ることを分けた。ここでは同じ一つの写像の中で、分母 N の有理数の点はちょうど戻り、それ以外の点は戻らない。論文221 は、最後の桁を一つ変えると固有値が大きく動くことを示した。ここでは最後の桁の丸めが、一步ごとに黄金比の二乗の倍で育つ。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、連続の上の混ぜることと画素の上の戻ることは、同じ行列を持つが、動かすもの（座標が有理数か）が違うので同根とは呼ばない。加えたのは、同じ行列が混ぜることと戻ることを並べて数えたこと、戻る回数をピサノ周期と $N=2$ から 300 で突き合わせたこと、画素の並べ替えの輪の長さを数えたこと、倍精度で戻れない回を桁数を変えて測ったこと、外れた見込みを記録したことである。

1. 問いと答えの形

アーノルドとアヴェズ（1968）は、ドーナツの表面（トーラス）を正方形で表し、その上の猫の絵に写像 $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$ （1 で割った余り）をかけて見せた。一回ごとに絵は斜めに引き伸ばされ、正方形の外にはみ出た分は反対側から戻り、数回で猫の形は跡形もなく混ざる。これがアーノルドの猫写像である。

ところが、同じ写像を画面の画素に当てると、混ざったはずの猫が、ある回数でびたりと元の姿に戻る。混ぜ続ける写像が、なぜ戻するのか。本稿は、同じ一つの行列が、連続の上では混ぜ続け、画素の上では必ず戻ることを数で確かめ、二つを分けているのが座標の種類であることを示す。

2. 同じ行列

猫写像の行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。行列式は 1 で面積を保ち、跡は 3 である。固有値は 2.618033989 と 0.381966011 で、黄金比の二乗とその逆数である。この行列はフィボナッチ行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の二乗である。

論文1053 は、この同じ行列をタイルの置換行列として使い、タイルの個数の比が黄金比に寄ることを示した。そこでの大きい固有値も 2.618033989 である。同じ行列が、ここではトーラスの上の写像になる。

3. 連続の上では混ぜる

近い二点から始めて、隔たりが一步ごとに何倍になるかを測った。倍率は **2.607724**、**2.617812** と進み、4 歩目からは **2.618034** にそろった。隔たりは一步ごとに黄金比の二乗の倍で開く（リャプノフ指数 **0.962424**）。

次に、小さな正方形（一辺 **0.05**）に 10 万個の点を置き、正方形を 10×10 のますに分けて、各ますの点の数を数えた。一様なら、どのますも **1000** 個である。

歩	最少のます	最多のます	一様からの相対の隔たり
0	0	100000	99.000
2	0	36627	35.627
4	0	5994	4.994
5	0	2366	1.366
6	840	1230	0.230
7	910	1106	0.106
8	916	1084	0.084

最初是一个のますに全部が集まっていた点が、**6** 歩で全部のますに入り、**8** 歩で一様の **1** 割以内になった。連続の上では、この写像は混ぜ続ける。

4. 画素の上では必ず戻る

同じ写像を、 $N \times N$ の画素の上で $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$ (N で割った余り) として当てる。全部の画素が元の位置に戻るまでの回数 $T(N)$ を、全部の画素を実際に写して数え ($N=2$ から **120**)、行列の冪が単位行列に戻る回数でも数えた ($N=2$ から **300**)。二つの数え方は一致した。

猫写像はフィボナッチ行列の二乗なので、戻る回数はフィボナッチ数列を N で割った余りの周期（ピサノ周期、ウォール 1960）から決まる。ピサノ周期を **2** で割れるならその半分、割れないならそのままである。この関係は $N=2$ から **300** のすべてで一致した。

N	戻る回数	ピサノ周期	戻る回数 $\div N$
2	3	3	1.5000
5	10	20	2.0000
10	30	60	3.0000
11	5	10	0.4545
50	150	300	3.0000
100	150	300	1.5000
101	25	50	0.2475
125	250	500	2.0000
250	750	1500	3.0000
256	192	384	0.7500
300	300	600	1.0000

戻る回数は、 $N=2$ から 300 のどれでも $3N$ を超えない（ダイソンとフォーク 1992）。ちょうど $3N$ になるのは $N=10 \cdot 50 \cdot 250$ で、どれも 2 と 5 の冪の積である。

5. フィボナッチ数とリュカ数の画素は速く戻る

画素の数そのものがフィボナッチ数やリュカ数だと、戻るのが速い。

フィボナッチ数の N	8	13	21	34	55	89	144	233
戻る回数	6	14	8	18	10	22	12	26
リュカ数の N	7	11	18	29	47	76	123	199
戻る回数	8	5	12	7	16	9	20	11

144 画素の絵は 12 回、199 画素の絵は 11 回で戻る。戻る回数を N で割った値が小さい順に並べると、199（11 回）、144（12 回）、288（24 回、144 の 2 倍）が上位の三つである。

ここで見込みが一つ外れた。上位の六つはどれもフィボナッチ数かリュカ数か、その2倍だろうと見込んだが、4位から6位の276・252・205はどれにも当たらなかった。主張するのは上位の三つまでである。

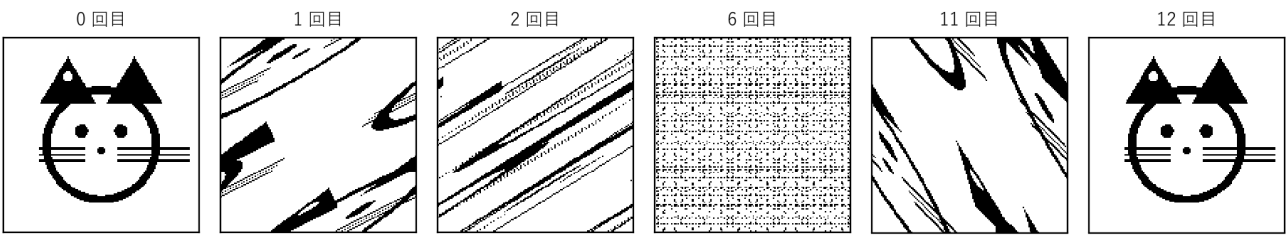


図1：144×144の画素に置いた絵に猫写像をかけた。1回目から混ざり始め、11回目まで元の形は見えないが、12回目にびたりと戻る。

6. なぜ戻るか：画素の並べ替え

画素の点は、座標が分母Nの有理数である。写像はその有限個の点を並べ替えるだけなので、何回か繰り返せば必ず全部が元に戻る。並べ替えを輪（サイクル）に分けて数えた。

N	画素の数	輪の本数	輪の長さの種類	最小公倍数
144	20736	1738	1・3・4・6・12	12
250	62500	250	1・2・3・6・10・30・50・150・250・750	750

どの輪の長さも戻る回数を割り、輪の長さの最小公倍数がちょうど戻る回数になる。論文81は、微視の状態は必ず戻るが、戻る前に宇宙が終わるほど長くなると書いた。ここでは状態が有限の画素なので、250画素でも62500個の点が750回で戻る。

7. 倍精度の計算では戻れない

では、画素ではなく実数の座標で同じ点を追うとどうなるか。250画素の点(37/250, 101/250)は、厳密な整数で追っても、厳密な分数で追っても、750回で出発点に戻る。ところが37/250は二進数では正確に表せず、倍精度の値は真の値から 7.327×10^{-18} ずれている。そのずれが一步ごとに黄金比の二乗の倍で育つ。

桁数	軌道から外れる最初の回	見積もり	750 回目の出発点からの隔たり
16 (倍精度)	37	31.8	4.739×10^{-1}
50	118	113.2	1.124×10^{-1}
100	237	232.8	3.840×10^{-1}
200	477	472.0	3.469×10^{-1}
400	外れない	950.5	4.778×10^{-89}

「外れる」は、厳密な軌道から画素の半分より離れたときとした。見積もりは、桁数に $\ln 10$ を掛けて $2\ln \varphi$ で割ったもの（から画素の大きさの分を引いたもの）である。倍精度では 37 回目に外れ、750 回目には出発点から 4.739×10^{-1} 離れている。桁を増やすと外れる回は延び、延び方は見積もりの傾きとよく合う（81 回対 81.3 回、119 回対 119.6 回、240 回対 239.2 回）。400 桁あれば 750 回を追いきり、出発点に 4.778×10^{-89} まで戻る。

見込みがもう一つ外れた。外れる回が見積もりと 3 回以内で合うと見込んだが、どの桁数でも実測が 4 から 5 回遅れた（差は $5.2 \cdot 4.8 \cdot 4.2 \cdot 5.0$ ）。延び方は見積もりどおりなので、ずれは一定の差である。その理由は測っていない。論文221 は、最後の桁を一つ変えると固有値が大きく動くことを示した。ここでは最後の桁の丸めが、一步ごとに育って軌道を奪う。

8. 途中で絵が逆さまになる

戻る回数の半分で行列の冪が $-I$ になると、絵は 180 度回った姿で現れる。250 画素では、375 回目がそうである。N=3 から 300 のうち、半分の回数で $-I$ になる N は 52 個であった。

最初は、144 画素の絵も 6 回目に逆さまになると見込んでいたが、6 回目の行列の冪は $-I$ ではなかった。どの N で逆さまになるかの規則は、本稿では測っていない。

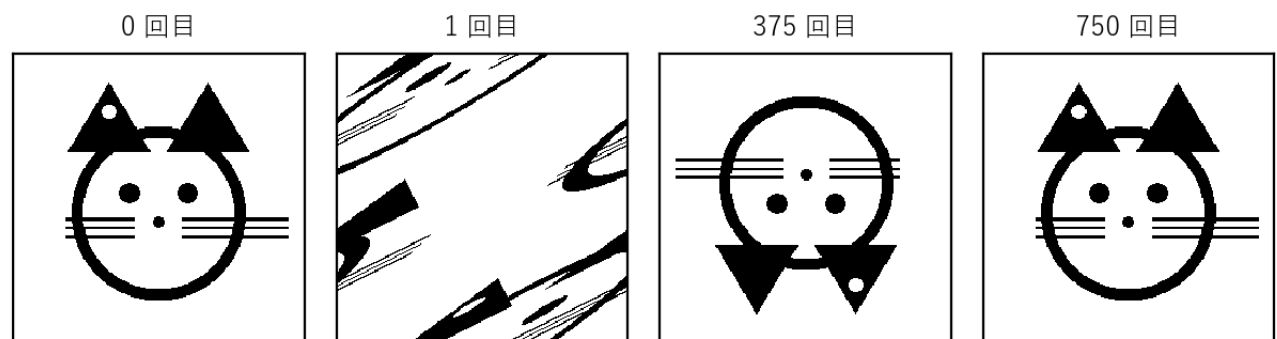


図2：250×250 の画素に置いた絵。375 回目には 180 度回った姿で現れ、750 回目に元に戻る。

9. 分離子：座標が分母 N の有理数か、それ以外の点か

同じ行列が、連続の上では混ぜ続け、画素の上では戻る。行列の性質（引き伸ばしの倍率、面積を保つこと）はどちらも同じである。違うのは座標である。画素の点は分母 N の有理数で、写像はその有限個の点の並べ替えになるので、必ず戻る。それ以外の点、たとえば倍精度の数や無理数の点は、並べ替えの輪に入らず、隔たりが育って戻らない。

分離子は、座標が分母 N の有理数か、それ以外の点かである。論文213 が分けた「ちょうど戻る」と「いくらでも近くへ来るが戻らない」が、ここでは同じ一つの写像の中で、座標の種類によって分かれる。

10. 既刊との関係

論文1053 は、この行列を置換行列として、タイルの個数の比が黄金比に寄ることを示した。ここでは同じ行列をトーラスの上の写像として、混ぜることと戻ることを数えた。

論文81 は、微視の状態は必ず戻るが、戻る前に宇宙が終わるほど長くかかると書いた。ここでは状態が有限の画素なら、戻るまでがせいぜい $3N$ 回で、画素の数よりずっと短いを見た。

論文213 は、周期運動はちょうど戻り、準周期運動は決して正確には戻らないがいくらでも近くへ来ることを分けた。ここでは同じ一つの写像の中で、分母 N の有理数の点はちょうど戻り、それ以外の点は戻らなかった。

論文221 は、最後の桁を一つ変えると固有値が大きく動くことを示した。ここでは最後の桁の丸めが、一步ごとに黄金比の二乗の倍で育った（第7節）。

論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、連続の上の混ぜることと画素の上の戻ることは、同じ行列を持つが、動かすもの（座標が有理数か）が違うので、同根とは呼ばない。

結び

結び：同じ行列が、連続の上では混ぜ続け、画素の上では必ず絵を元に戻す。連続の上では、隔たりが一步ごとに **2.618034** 倍に開き、10 万個の点は 8 歩で一様に広がる。画素の上では、戻る回数がピサノ周期から決まり、 $N=2$ から 300 のすべてで一致し、どれも $3N$ 回以内である。144 画素の絵は 12 回、199 画素の絵は 11 回で戻る。戻る理由は、画素の点が分母 N の有理数で、写像がその並べ替えになるからで、144 画素の 1738 本の輪の長さの最小公倍数はちょうど 12 である。倍精度では 37 回目に軌道から外れ、400 桁あれば 750 回を追いついて戻る。正直に書くと、見込みが三つ外れた。速く戻る上位六つの規則、外れる回の見積もりとの差、144 画素が逆さまになる回で、差と規則の理由は測っていない。分離子は、座標が分母 N の有理数か、それ以外の点か。有理数の点は並べ替えの輪に入って戻り、それ以外の点は隔たりが育って戻らない。

参考文献

1. Arnold, V. I., & Avez, A. (1968). *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Benjamin.
2. Dyson, F. J., & Falk, H. (1992). Period of a Discrete Cat Mapping. *The American Mathematical Monthly*.
3. Wall, D. D. (1960). Fibonacci Series Modulo m . *The American Mathematical Monthly*.
4. 山岸勇輝 (2026). ポアンカレ回帰定理と時間の矢 [論文81]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/81> ・ DOI: 10.5281/zenodo.21733062
5. 山岸勇輝 (2026). 「戻ってくる」には別根がある [論文213]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/213> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22119380
6. 山岸勇輝 (2026). 最後の桁を一つ変えると、固有値が 0.16 動く [論文221]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/221> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22120012
7. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
8. 山岸勇輝 (2026). 「拡大しても同じ」を一つの倍率に弱めると、指数の唯一性は失われる [論文1053]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1053> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22904428

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)