

黄金比の回転数の曲線は、部分商が 2 や 3 の数の曲線より強い蹴りまで残る

— 留数が 0.25 に届く蹴りは黄金比で 0.971635、部分商がどれも 2 の数で 0.957652、どれも 3 の数で 0.891360 — 分離子は、回転数の連分数の部分商がどれも 1 か、大きい数を含むか — [論文1075]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1075>

— From thinking to syncing. —

要旨

回る棒を一定の間隔で蹴る模型（チリコフ 1979 の標準写像）では、蹴りが弱いうちは位相平面を横に渡る曲線（不変曲線）が残る、点はその上と下を行き来できない。蹴りを強めると、曲線は一本ずつ壊れる。グリーン（1979）は、回転数が黄金比の曲線が最後まで残ると見立て、それが壊れる蹴りを求めた。本稿は、黄金比の曲線と、連分数の部分商がどれも 2 の数・どれも 3 の数の曲線が壊れる蹴りを同じ方法で測って並べ、順を分けているものを名指す。新しい定理も法則も主張しない。第一に、測り方。回転数 p/q の周期軌道を対称な線の上で探し、その留数（一周ぶんのヤコビ行列の跡から作る数）が 0.25 に届く蹴りを、曲線が壊れる目安にした（グリーンの方法）。第二に、黄金比。近似分数を $5/8$ から $377/610$ まで細かくすると、目安の蹴りは文献の値 **0.97163540631** に寄り、 $377/610$ では **0.971635313** で、差は 9.32×10^{-8} である。第三に、これが本稿の芯である。部分商が大きい数ほど先に壊れる。部分商がどれも 2 の数 ($\sqrt{2}-1$) は **0.957652029**、どれも 3 の数は **0.891360492** で目安に届き、黄金比より先に壊れる。黄金比との隔たりは、近似分数を一段進めたときの動きの 46.4 倍と 68.8 倍である。第四に、その順は、近似分数に近づかれにくい順と同じである。近似分数 p/q に対する $q|q\alpha - p|$ の行き着く値は、黄金比で **0.447213596**（論文812 の値）、部分商 2 の数で **0.353553391**、部分商 3 の数で **0.277350098** である。三つとも連分数の周期が 1 の二次の無理数で、分けているのは周期ではなく部分商の大きさである。第五に、留数と関係のない道でも確かめた。曲線の下から出した 2000 点を 10 万歩ずつ動かすと、蹴り 0.95 と 0.97 ではどの点も上へ抜けず、1.10 では 3 割余り、1.30 では 8 割余りが抜けた。正直に書くと、見込みが四つ外れた。文献の値との差の符号は $233/377$ まで交互だったが $377/610$ で同じ向きが続いた。差は一段ごとに縮むと見込んだが $233/377$ で一度広がった。分母が 1000 前後の近似分数では、留数が正の軌道を倍精度で安定に追えず、分母 610 で止めた。蹴り 1.00 は文献の値より強いのに、10 万歩では一点も抜けなかった。キーワード：標準写像、不変曲線、留数、黄金比、連分数、近似分数、KAM の定理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。標準写像、弱い蹴りで無理数の回転数の曲線が残ること（コルモゴロフ、アーノルド、モーザーの定理）、留数による判定（グリーン 1979）、黄金比の曲線が壊れる蹴りの値、黄金比の曲線が最後に壊れるという見立て（グリーン 1979、マッケイ 1983）は、いずれも既知である。KAM の定理を証明しない。引くだけである。黄金比が最後だとは一般には言わない。比べるのは三つの数だけである。すべての回転数の中で黄金比の曲線が最後に壊れるかはグリーンの見立てで、証明されていない。くりこみの理論に立ち入らない。近似分数の目安の蹴りを数えるまでである。実在の系に広げない。加速器の粒子も、太陽系の小惑星も扱わない。理由を推測で書かない。差の符号の交互が 377/610 で途切れた理由、分母 1000 前後で軌道を見失う理由、蹴り 1.00 で点が抜けなかった理由は、測っていない。既刊との関係：論文310 は射程注記で KAM 理論を扱わないとして、可積分でない系で不変量が生き残るかを空けていた。本稿はその射程注記の席に座る（先客なし）。蹴りを強めたとき、どの回転数の曲線がどこまで生き残るかを数える。論文213 は、準周期の運動が正確には戻らないがいくらでも近くへ来ること、その近づき方が連分数の分母で決まることを示した。ここでは同じ連分数が、非線形の写像の中で曲線の強さを決める。論文811 は、連分数の周期が二次方程式の根であることの印だと示し、論文812 は、近似のしやすさを決めるのは部分商が有界かどうかだと示した。ここでは周期が 1 で部分商が有界な三つの数を比べ、部分商の大きさそのものが壊れる順と同じ順に並ぶことを見る。論文1053 は、タイルの置換行列の固有値から黄金比を出した。ここでの黄金比は、近似分数に最も近づかれにくい数として現れる。論文1073 は、面積を保つ写像の不動点を数えた。標準写像も面積を保ち、ここではその周期軌道を使う。論文1074 は、アーノルドの猫写像が連続の上で混ぜ続けることを見た。同じく面積を保つ写像でも、標準写像は弱い蹴りでは曲線を残す。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、論文1053 のタイルの黄金比とここでの黄金比は、動かすもの（置換の規則と、回転数の部分商）が違うので同根とは呼ばない。加えたのは、三つの数の曲線が壊れる目安の蹴りを同じ方法で測って並べたこと、近似分数を分母 610 まで追って文献の値との差を測ったこと、回転数を鏡に映した数で同じ蹴りが出ることを別の軌道で確かめたこと、留数と関係のない道（点が抜けるか）で確かめたこと、外れた見込みを記録したことである。

1. 問いと答えの形

棒を一定の間隔で蹴って回す模型を考える。棒の角を x （一周を 1 とする）、角の速さを y とし、一回の蹴りの強さを K とすると、蹴るたびに次の写像が一回かかる（チリコフ 1979 の標準写像）。

$$y' = y - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x, \quad x' = x + y'.$$

$K = 0$ なら y は変わらず、位相平面の横の線はどれもそのまま保たれる。蹴りを入れると、横の線はゆがんだ曲線（不変曲線）になって生き残るものと、壊れるものに分かれる。曲線が一本でも残っていれば、点はその上と下を行き来できない。

蹴りが弱ければ、回転数（一回あたりに x が進む量の平均）が「近似分数に近づかれにくい」無理数の曲線は生き残る。これがコルモゴロフが述べ、アーノルド（1963）とモーザーが証明した定理（KAM の定理）の、この写像での姿である。では蹴りを強めたとき、どの曲線が最後まで残るのか。グリーン（1979）は黄金比の曲

線だと見立てた。本稿は、黄金比の曲線と、連分数の部分商がどれも 2 の数・どれも 3 の数の曲線を同じ方法で測って並べ、壊れる順を分けているのが部分商の大きさであることを示す。

2. 測り方：周期軌道の留数

無理数の曲線を直接つかまえるのは難しいので、その回転数に近い分数 p/q を使う。 q 回で x がちょうど p だけ進んで元の点に戻る周期軌道を、写像の対称な線 ($x = 0$ と $x = 1/2$) の上から出して探した。一周ぶんのヤコビ行列の積を M とすると、グリーンの留数は

$$R = \frac{2 - \text{tr } M}{4}$$

である。近似分数を細かくしていくと、曲線が残る蹴りでは留数が 0 に向かい、壊れた蹴りでは限りなく大きくなる。本稿は、グリーンにならって、二本の対称な線の軌道のうち大きいほうの留数が 0.25 に届く蹴りを、壊れる目安にした。

写像はどの蹴りでも面積を保つ（ヤコビ行列の行列式が 1）。測り方の確かめとして、 $K = 0.9$ の $8/13$ の軌道を探すと、13 回まわって戻ったときの残りは 2.776×10^{-15} で、留数は 0.089359825 だった。

3. 黄金比の近似分数

黄金比の小数部分 $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618033989$ の連分数は $[0; 1, 1, 1, \dots]$ で、部分商がどれも 1 である。近似分数はフィボナッチ数の比 $5/8, 8/13, \dots$ になる。それぞれで留数が 0.25 に届く蹴りを求めた。

近似分数	値	留数 0.25 の蹴り K	文献の値との差
5/8	0.625000000	0.969029008	-2.61×10^{-3}
8/13	0.615384615	0.972634324	$+9.99 \times 10^{-4}$
13/21	0.619047619	0.971223839	-4.12×10^{-4}
21/34	0.617647059	0.971777084	$+1.42 \times 10^{-4}$
34/55	0.618181818	0.971571920	-6.35×10^{-5}
55/89	0.617977528	0.971653414	$+1.80 \times 10^{-5}$
89/144	0.618055556	0.971624952	-1.05×10^{-5}
144/233	0.618025751	0.971637086	$+1.68 \times 10^{-6}$
233/377	0.618037135	0.971633392	-2.01×10^{-6}
377/610	0.618032787	0.971635313	-9.32×10^{-8}

文献の値はマイス（2008）が引く 0.97163540631 である。差は 5/8 の 2.61×10^{-3} から 377/610 の 9.32×10^{-8} まで縮んだ。

ここで見込みが二つ外れた。差の符号は 5/8 から 233/377 まで一段ごとに入れ替わったので、そのまま交互に続くと見込んだが、377/610 では 233/377 と同じ負の向きが続いた。また差は一段ごとに縮むと見込んだが、233/377 の差 (2.01×10^{-6}) は 144/233 の差 (1.68×10^{-6}) より大きかった。どちらも理由は測っていない。

もう一つ、分母が 1000 前後の近似分数（377/987 など）では、留数が正の軌道を倍精度の計算で安定に追いきれず、蹴りを少し変えるだけで見失った。そこで分母 610 までで止めた。

4. 鏡に映した回転数で確かめる

写像は $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ で自分に戻り、そのとき回転数 ω は $1 - \omega$ に入れ替わる。 $1 - 0.618033989$ はおよそ 0.381966 で、黄金比の二乗の逆数である。連分数は $[0; 2, 1, 1, 1, \dots]$ 、近似分数は 5/13, 8/21, $\dots$, 233/610 である。同じ分母の近似分数では、同じ蹴りが出るはずである。

別の軌道の組を探して同じ計算をすると、九つの近似分数すべてで、同じ分母の黄金比の近似分数の蹴りと一致し、差は最大でも 2.0×10^{-10} だった。測り方が軌道の選び方によらないことの確かめである。

5. 部分商が 2 の数と 3 の数

次に、部分商がどれも 2 の数 $\sqrt{2} - 1 = 0.414213562$ （連分数 $[0; 2, 2, 2, \dots]$ ）と、どれも 3 の数 $(\sqrt{13} - 3)/2 = 0.302775638$ （連分数 $[0; 3, 3, 3, \dots]$ ）で同じことをした。

数	近似分数	値	留数 0.25 の蹴り K
部分商 2 の数	5/12	0.416666667	0.964345844
	12/29	0.413793103	0.960550761
	29/70	0.414285714	0.958665291
	70/169	0.414201183	0.957953484
	169/408	0.414215686	0.957652029
部分商 3 の数	10/33	0.303030303	0.896435455
	33/109	0.302752294	0.892527184
	109/360	0.302777778	0.891360492

近似分数を一段進めたときの蹴りの動きは、部分商 2 の数で 3.80×10^{-3} 、 1.89×10^{-3} 、 7.12×10^{-4} 、 3.01×10^{-4} 、部分商 3 の数で 3.91×10^{-3} 、 1.17×10^{-3} と、どちらも一段ごとに小さくなった。部分商 3 の数はまだ 10^{-3} の桁で動いているので、最後の値は目安である。

それでも順は動かない。黄金比 0.971635 との隔たりは、部分商 2 の数で 0.013983、部分商 3 の数で 0.080275 で、最後の一段の動きのそれぞれ 46.4 倍と 68.8 倍ある。三つの中では、部分商 3 の数、部分商 2 の数、黄金比の順に壊れ、黄金比の曲線が最後まで残る。

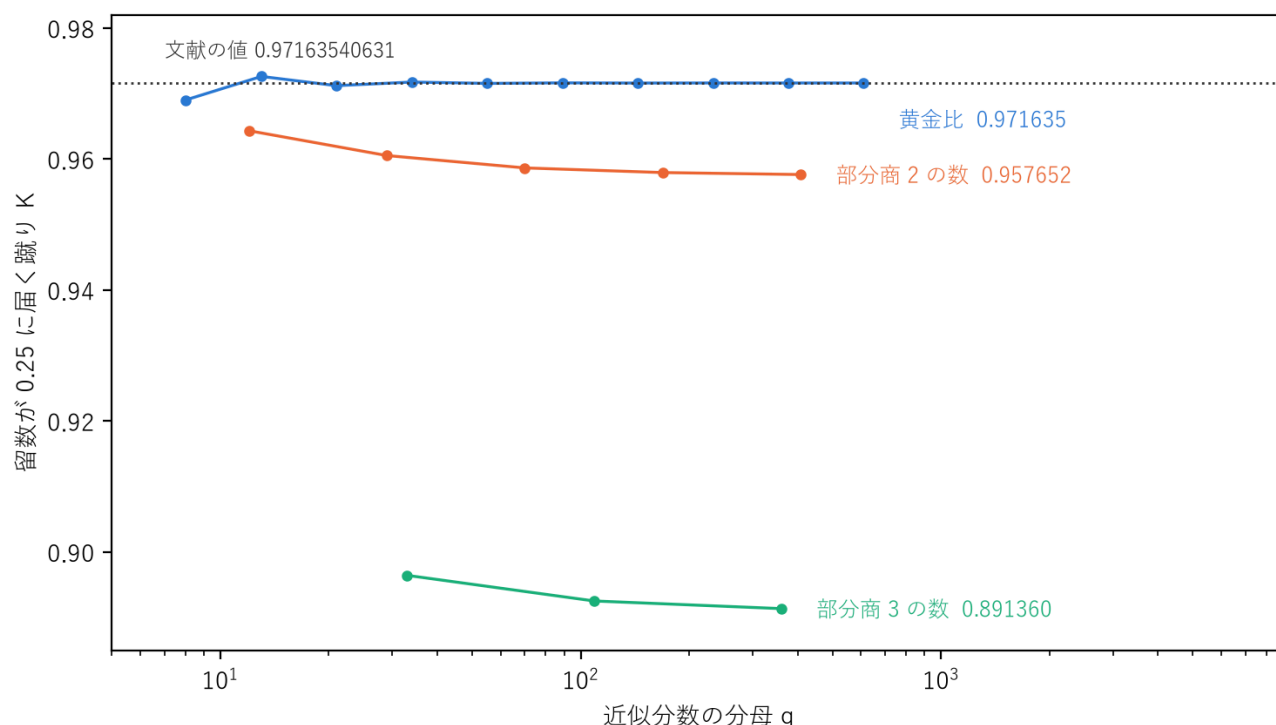


図1：近似分数の分母 q （横軸・対数）と、留数が 0.25 に届く蹴り（縦軸）。黄金比の列は文献の値（点線）の上下を行き来しながら寄る。部分商 2 の数と 3 の数の列は、それより低いところへ寄る。

6. 近づかれにくさとの対応

近似分数 p/q がどれほど近づくかを $q|q\alpha - p|$ で測る。部分商がどれも a の数では、これが $1/\sqrt{a^2 + 4}$ に行き着く。80 桁の十進で計算すると、30 段目の値は次のとおりだった。

数	最後の近似分数の K	$q q\alpha - p $ の 30 段目	閉じた値
黄金比 ($a = 1$)	0.971635313	0.447213596	0.447213595
部分商 2 の数 ($a = 2$)	0.957652029	0.353553391	0.353553391
部分商 3 の数 ($a = 3$)	0.891360492	0.277350098	0.277350098

黄金比の値 0.447213596 は、論文812 が近似のしやすさの端として出した 0.447214 と同じものである。値が大きいほど近似分数は近づきにくく、三つの並びは、曲線が壊れる蹴りの並びとちょうど同じ向きになった。

三つとも連分数の周期は 1 で、どれも二次方程式の根である（論文811）。部分商はどれも有界である（論文812）。それでも壊れる蹴りは違い、分けているのは周期でも有界かどうかでもなく、部分商の大きさそのものである。部分商がどれも 1 の黄金比は、近似分数に最も近づかれにくく、曲線も最も強い蹴りまで残る。

7. 留数と関係のない道：点は曲線を越えるか

留数は周期軌道から間接に測る目安なので、曲線そのものが壁になっているかを別の道で確かめた。不安定な不動点 $(1/2, 0)$ のすぐ近くに 2000 点を置き、10 万歩ずつ動かして、黄金比の曲線より上の $y \geq 1$ まで抜ける点を数えた。

蹴り K	抜けた割合	抜けた点の歩数の中央	最後の y の範囲
0.95	0.0000	--	−0.439 から 0.445
0.97	0.0000	--	−0.456 から 0.455
1.00	0.0000	--	−0.629 から 0.582
1.10	0.3295	44586	−3.471 から 3.792
1.30	0.8195	7241	−17.561 から 17.846

黄金比の曲線が残る蹴り 0.95 と 0.97 では、どの点も上へ抜けなかった。蹴り 0.97 は部分商 2 の数の曲線が壊れる目安 (0.957652) より強いので、そこで点を止めている壁は部分商 2 の数の曲線ではない。どの曲線が壁になっているかは、この数え方では分からない。曲線が壊れた 1.10 と 1.30 では、それぞれ 0.3295 と 0.8195 の点が抜けた。

ここで見込みがもう一つ外れた。蹴り 1.00 は文献の値より強く、曲線は壊れているはずなのに、10 万歩では一点も抜けなかった。壊れた直後に点がどれほどの速さで抜けるかは測っていない。

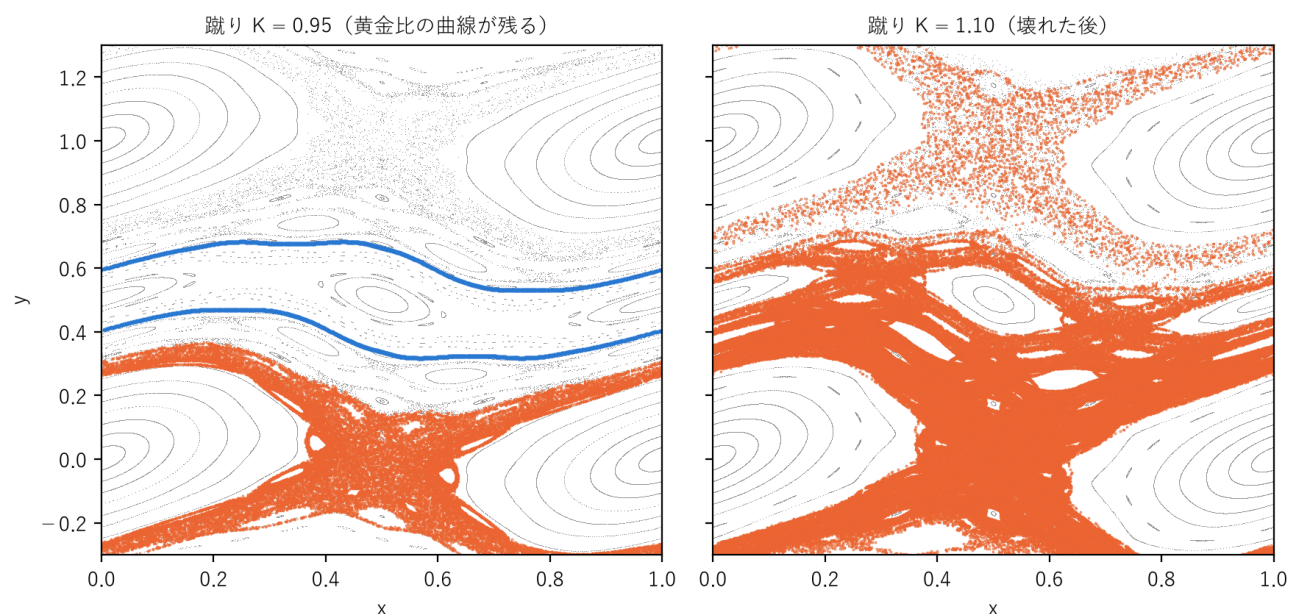


図2：標準写像の位相平面。左は蹴り 0.95、右は蹴り 1.10。灰色は横に並べた点から出した軌道。左の青は 377/610 と 233/610 の周期軌道で、黄金比の曲線（上）とその鏡の曲線（下）に沿って並ぶ。橙は不安定な不動点の近くから出した一本の軌道で、左では青の曲線より下にとどまり、右では上へ抜ける。

8. 既刊との関係

論文310 は射程注記で KAM 理論を扱わないとして、可積分でない系で不変量が生き残るかを空けていた。本稿はその射程注記の席に座り、蹴りを強めたとき、どの回転数の曲線がどこまで生き残るかを数えた。

論文213 は、準周期の運動が正確には戻らないがいくらでも近くへ来ること、その近づき方が連分数の分母で決まることを示した。ここでは同じ連分数が、非線形の写像の中で曲線の強さを決めた。

論文811 は、連分数の周期が二次方程式の根であることの印だとし、論文812 は、近似のしやすさを決めるのは部分商が有界かどうかだと示した。ここでは周期が 1 で部分商が有界な三つの数を比べ、部分商の大きさが壊れる順と同じ向きに並ぶことを見た。

論文1053 は、タイルの置換行列の固有値から黄金比を出した。ここでの黄金比は、近似分数に最も近づかれにくい数として現れた。論文300 の基準で、二つは動かすもの（置換の規則と、回転数の部分商）が違うので、同根とは呼ばない。

論文1073 は、面積を保つ写像の不動点を数えた。標準写像も面積を保ち、ここではその周期軌道の留数を使った。論文1074 は、アーノルドの猫写像が連続の上で混ぜ続けることを見た。同じく面積を保つ写像でも、標準写像は弱い蹴りでは曲線を残し、それが蹴りの強さとともに一本ずつ壊れる。

結び

結び：黄金比の回転数の曲線は、部分商が 2 や 3 の数の曲線より強い蹴りまで残る。周期軌道の留数が 0.25 に届く蹴りは、黄金比の近似分数では 377/610 で **0.971635313** まで寄り、文献の値との差は 9.32×10^{-8} である。部分商がどれも 2 の数は **0.957652029**、どれも 3 の数は **0.891360492** で先に壊れ、黄金比との隔たりは最後の一段の動きの 46.4 倍と 68.8 倍ある。その順は、近似分数に近づかれにくい順 (**0.447213596**、**0.353553391**、**0.277350098**) と同じである。点が抜けるかという別の道でも、蹴り 0.95 と 0.97 では抜けず、1.10 と 1.30 では抜けた。正直に書くと、見込みが四つ外れた。差の符号の交互、差の単調さ、分母 1000 前後の軌道、蹴り 1.00 で抜けないことで、どれも理由は測っていない。分離子は、回転数の連分数の部分商がどれも 1 か、大きい数を含むか。三つの数はどれも周期 1 の二次の無理数で、分けているのは部分商の大きさである。

参考文献

1. Arnol'd, V. I. (1963). Proof of a Theorem of A. N. Kolmogorov on the Invariance of Quasi-Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian. *Russian Mathematical Surveys*.
2. Chirikov, B. V. (1979). A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems. *Physics Reports*.
3. Greene, J. M. (1979). A Method for Determining a Stochastic Transition. *Journal of Mathematical Physics*.
4. MacKay, R. S. (1983). A Renormalisation Approach to Invariant Circles in Area-Preserving Maps. *Physica D*.
5. Meiss, J. D. (2008). Visual Explorations of Dynamics: The Standard Map. *Pramana*.
6. 山岸勇輝 (2026). 「戻ってくる」には別根がある [論文213]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/213> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22119380
7. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
8. 山岸勇輝 (2026). 『「保存する」には二つの根があり、ネーターは片方しか説明しない』 [論文310]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/310> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22172372
9. 山岸勇輝 (2026). 『連分数の周期は、近似のしやすさではなく、二次方程式の根であることの印である』 [論文811]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/811> ・ DOI: 10.5281/zenodo.23015470
10. 山岸勇輝 (2026). 『近似のしやすさを決めているのは、部分商が有界か非有界かである』 [論文812]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/812> ・ DOI: 10.5281/zenodo.23015472
11. 山岸勇輝 (2026). 「拡大しても同じ」を一つの倍率に弱めると、指数の唯一性は失われる [論文1053]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1053> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22904428
12. 山岸勇輝 (2026). 面積と流束を保つ写像の不動点は、関数の臨界点と同じ床を持つ [論文1073]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1073>
13. 山岸勇輝 (2026). 同じ行列が、連続の上では混ぜ続け、画素の上では必ず絵を元に戻す [論文1074]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1074>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)