

凸の閉曲線の頂点が 4 つ以上あるのは、閉じる条件が曲率半径の一次の揺れを消すからである

— 揺れが k 次から上だけなら頂点は $2k$ 以上、開いた弧と二周する曲線は 2 で足り、球面を二等分する曲線の変曲点は 4 つ以上 — 分離子は、大域の条件が曲がり方の関数からどの揺れを消すか — [論文

1076]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1076>

— *From thinking to syncing.* —

要旨

卵のような形でも、腎臓のような形でも、自分と交わらない閉じた曲線には、曲がり方が最も強い所と最も弱い所（頂点）が少なくとも4つある。これが四頂点定理である（ムカパディヤ 1909 が凸の曲線で示した）。なぜ2つでも3つでもなく4なのか。本稿は、凸の曲線について、閉じるという条件が曲がり方の関数から何を消すかを数で確かめ、4がそこから来ることを示す。新しい定理も法則も主張しない。第一に、頂点は4つ以上ある。半径を揺らしたでたらめな閉曲線を、凸のもの1000本、凸でないが自分と交わらないもの1000本作ると、頂点はどれも4以上の偶数だった。自分と交わるリマソンだけが2つで足りた。第二に、これが本稿の芯である。閉じる条件は、曲率半径の一次の揺れをちょうど消す。曲率半径を接線の向きの関数として見ると、その一次の成分は曲線が閉じるずれそのものなので、閉じた曲線では0になる（300本で最大 2.8×10 のマイナス16乗）。残る最も低い揺れは二次なので、曲率半径と平均の差の符号は4回以上入れ替わり、頂点は4つ以上になる。第三に、一次の揺れが残ると2で足りる。一次の揺れを持つ弧は、一周まわしても端が0.942477796ずれて閉じない。二周してから閉じるリマソンは、閉じる条件が一次の揺れしか消さず、半分の振動数の揺れが残って頂点は2つである。第四に、下限は、残っている最も低い揺れの2倍である。曲率半径がk次の揺れだけを持つ曲線は頂点がちょうど2k、k次から上だけを持つ曲線は頂点が2k以上だった（kが2から6）。第五に、球面でも同じ形の数がある。球面を等しい面積に分ける曲線1000本では、変曲点（測地的曲率が0になる点）はどれも4以上だった（アーノルドが名付けたテニスボールの定理）。二等分の条件は、ガウス＝ボネの定理で測地的曲率の総和を0にする。同じ曲線を北へずらして二等分をやめると、変曲点が0のものが出た。正直に書くと、仕組みを数で示したのは凸の曲線だけである。凸でない曲線は4以上を確かめただけで、球面の側で2ではなく4になる理由は、本稿の道具では出さない。測り方の誤りを二つ直した。キーワード：四頂点定理、曲率、曲率半径、フーリエ級数、テニスボールの定理、測地的曲率、ガウス＝ボネの定理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。四頂点定理（ムカパディヤ 1909・クネーザー 1912）、曲率半径のフーリエ級数による凸の場合の証明、周期関数の零点の数の下限（シュトゥルム＝フルヴィッツの定理）、オッサーマン（1985）の証明、テニスボールの定理（セグレ 1968・アーノルド 1994）は、いずれも既知である。定理を証明しない。曲線を作って数え、仕組みの一步ごとを数で確かめるまでである。仕組みを示すのは凸の曲線だけである。凸でない曲線は頂点を数えるだけで、クネーザーの場合の仕組みには立ち入らない。球面の 4 の理由を出さない。二等分の条件が測地的曲率の総和を 0 にすることまでは示すが、そこからは入れ替わりが 2 以上としか言えない。逆定理に立ち入らない。どんな曲率の関数が閉曲線から来るか（ドゥタークほか 2007）は扱わない。空間曲線と高い次元に広げない。名前について：本稿のシュトゥルム＝フルヴィッツの定理は、体系がほかで引くフルヴィッツの定理（近似や群のもの）とは別のものである。既刊との関係：論文224 は、多面体の角欠損の総和がいつも 4π であることを数えた。ここでは平面の閉曲線の曲率の総和がいつも 2π （二周する曲線は 4π ）で、球面の曲線では測地的曲率の総和が 2π から囲む面積を引いたものになる。論文1014 は、配位の欠陥の総和は 12 で動かないのに、5 配位の個数は動くことを示した。ここでも、曲率の総和は動かないのに、頂点の数は 4 から 16 まで動き、動かないのは下限の 4 である。論文67 は、 4π を 2π と球面のオイラー標数の積として読んだ。ここでは、曲線が何周するかが曲率の総和を決め、何周するかで頂点の下限も変わる。論文1010 は、太陽から見た月の道がいつも凸であることを数えた。ここでは凸の曲線の曲がり方が、どれほど一様でいられないかを数える。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、平面の四頂点の 4 と球面のテニスボールの 4 は、球面の側の仕組みを測っていないので、同根とは呼ばない。加えたのは、曲率の測り方を楕円の端とリマソンの既知の値で確かめたこと、凸と凸でない閉曲線を 1000 本ずつ数えたこと、曲率半径の一次の成分が 0 で二次の成分が残ることを測ったこと、開いた弧と二周する曲線を対照に置いたこと、下限が最も低い揺れの 2 倍になることを並べたこと、球面の二等分と変曲点を数えたこと、測り方の誤りを記録したことである。

1. 問いと答えの形

閉じた曲線の上を歩くと、曲がり方（曲率）は場所ごとに変わる。曲率が極大または極小になる点を頂点と呼ぶ。円ではどこも同じ曲がり方なので頂点は決まらないが、円でない閉曲線では頂点が少なくとも 4 つある。楕円なら、長い軸と短い軸の両端の 4 つである。これが四頂点定理で、ムカパディヤ（1909）が凸の曲線で示し、クネーザーが 1912 年に自分と交わらない曲線すべてに広げた（ドゥタークほか 2007 の整理による）。

極大と極小は交互に来るので、頂点の数は偶数である。では、なぜ 2 つでは足りないのか。本稿は凸の曲線について、閉じるという条件が曲がり方の関数から一次の揺れをちょうど消すこと、そして 4 がその消えた揺れの 2 倍の次にあることを、数で確かめる。

2. 測り方と確かめ

曲線は 4096 点で表し、微分はすべて周期関数の高速フーリエ変換で取った。曲率は

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

で、頂点は曲率の微分の符号が入れ替わる所として数えた。

確かめとして、長半径 2・短半径 1 の楕円の曲率は、端で最大 2.000000000 と最小 0.250000000 で、公式 a/b^2 と b/a^2 どおりだった。長半径 5 では 5.000000000 と 0.040000000 で、頂点はどちらも 4 である。

もう一つの確かめは、ドゥタークほか（2007）が頂点が 2 つしかない曲線の例として挙げたリマソン $r = 1 - 2 \sin \theta$ である。この曲線は内側に小さな輪を持ち、自分と交わる。測った曲率の最小は 0.555555556、最大は 3.000000000 で、記事の値 5/9 と 3 に一致し、頂点は 2 つだった。曲率の総和（曲率を長さに沿って足したもの）は 12.566370614 で、 4π である。接線の向きが二回まわって元に戻る曲線だからである。

3. でたらめな閉曲線を数える

半径を $r(\theta) = 1 + \sum_k c_k \cos(k\theta + \delta_k)$ と揺らした閉曲線を作った。半径がどこでも正なら、曲線は自分と交わらない。揺れを小さくすれば凸になり、大きくすれば凹む所が出る。

曲線	本数	頂点の最小	頂点の最大	ちょうど 4 の割合
凸の閉曲線	1000	4	16	0.192
凸でない閉曲線（自分と交わらない）	1000	4	16	0.065
リマソン（自分と交わる）	1	2	2	--

頂点は、凸でも凸でなくても、どれも 4 以上の偶数だった。凸の閉曲線の曲率の総和は、どれも 2π からのずれが最大 1.8×10^{-15} で、一周して戻る。

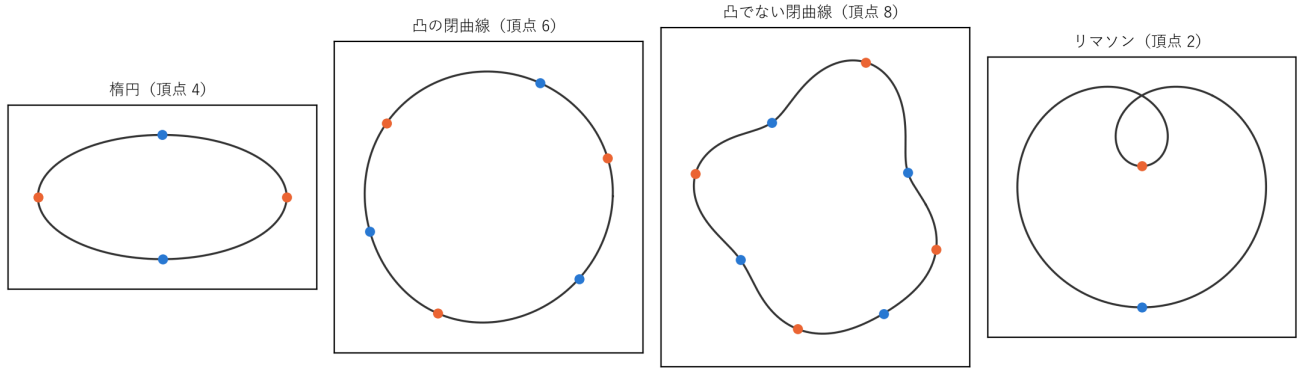


図1：閉曲線と頂点。左から、楕円（頂点 4）、でたらめな凸の曲線、凸でない閉曲線、リマソン（頂点 2）。橙の点は曲率の極大、青の点は極小。

4. 仕組み：閉じる条件は一次の揺れを消す

凸の曲線では、接線の向き φ が一周で 0 から 2π まで一度ずつ通る。そこで曲率半径 $\rho = 1/\kappa$ を φ の関数として見る。曲線の点は

$$x(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(u) \cos u \, du, \quad y(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(u) \sin u \, du$$

と書けるので、一周して元に戻る条件は $\int_0^{2\pi} \rho \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \rho \sin \varphi d\varphi = 0$ である。これは ρ のフーリエ級数の一次の成分が 0 であることにほかならない。

でたらめな凸の閉曲線 300 本で測ると、一次の成分の大きさは最大でも 2.8×10^{-16} で、二次の成分は最小 8.849×10^{-4} 、中央 2.960×10^{-2} 残っていた。閉じる条件は、一次の揺れだけをちょうど消している。

一次より低い揺れは平均（零次）だけで、それを引いた $\rho - \bar{\rho}$ は二次から上の揺れでできている。周期関数の揺れが k 次から始まるなら、その符号は少なくとも $2k$ 回入れ替わる（シュトゥルム＝フルヴィッツの定理）。実際、300 本とも $\rho - \bar{\rho}$ の符号は 4 回以上入れ替わり（最大 16）、どの曲線でも頂点の数はこの入れ替わりの数を下回らなかった。入れ替わりの間には必ず極大か極小があるからである。

5. 対照：一次の揺れが残ると 2 で足りる

閉じる条件を外すと何が起きるかを見る。曲率半径を $\rho = 1 + \varepsilon \cos \varphi$ として一周まわすと、一次の揺れが残るので曲線は閉じず、端がずれる。

曲線	端のずれ	$\pi\varepsilon$	曲率の極値
開いた弧 ($\varepsilon = 0.1$)	0.314159265	0.314159265	2
開いた弧 ($\varepsilon = 0.3$)	0.942477796	0.942477796	2

端のずれは $\pi\varepsilon$ どおりで、曲率の極値は 2 つしかない。一次の揺れを使ってよいなら、頂点は 2 つで足りる。

リマソンは閉じているのに頂点が 2 つである。この曲線では接線の向きが一周で 4π (測った曲率の総和 12.566370614) まわる。閉じる条件が消すのは一次の揺れ (向きが 2π まわる周期の成分) だけで、向きが 4π で一回まわる半分の振動数の揺れは消されない。測ると、半分の振動数の成分は 0.743891 残り、一次の成分は 2.8×10^{-17} だった。最も低い揺れが半分の振動数なので、 $\rho - \bar{\rho}$ の入れ替わりは 2 回で、頂点も 2 つになる。

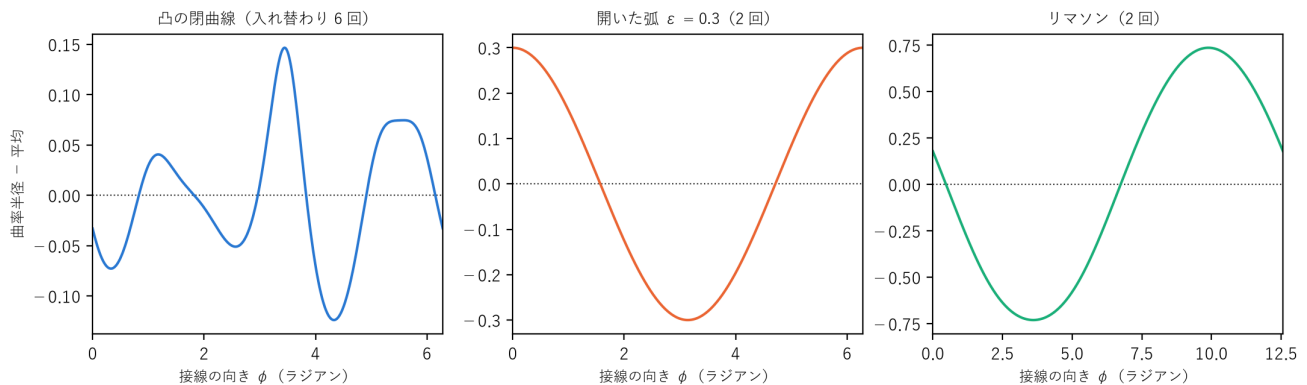


図2：接線の向きの関数として見た曲率半径と平均の差。左は凸の閉曲線 (入れ替わり 4 回以上)、中は開いた弧 $\varepsilon = 0.3$ (2 回)、右はリマソン (向きが 4π まわる間に 2 回)。

6. 下限は、残っている最も低い揺れの 2 倍

曲率半径 $\rho(\varphi)$ を先に決めて、上の積分で曲線を組んだ。一次の成分を入れなければ曲線は閉じる。組んだ曲線から曲率を測り直すと $1/\rho$ と最大 2.5×10^{-9} の差で一致した (曲率の測り方の別の確かめ)。

曲率半径	閉じるずれ	頂点
$1 + 0.3 \cos 2\varphi$	3.9×10^{-16}	4
$1 + 0.3 \cos 3\varphi$	1.7×10^{-16}	6
$1 + 0.3 \cos 4\varphi$	3.5×10^{-16}	8
$1 + 0.3 \cos 5\varphi$	5.2×10^{-16}	10
$1 + 0.3 \cos 6\varphi$	5.2×10^{-16}	12

k 次の揺れだけなら、頂点はちょうど $2k$ である。次に、 k 次から 10 次までの揺れをでたらめに重ねた曲線を 300 本ずつ作ると、頂点の最小は $k = 2$ で 4、 $k = 3$ で 6、 $k = 4$ で 8 だった。ちょうど $2k$ になる割合は 0.003、0.013、0.010 と小さく、揺れを重ねると頂点は下限より多くなりやすい。下限を決めているのは、残っている最も低い揺れの次数である。平面の閉曲線では、閉じる条件が一次を消すので、それが二次、下限が 4 になる。

7. 球面：面積を二等分する曲線

アーノルド（1994）は、テニスボールの縫い目のように球面を等しい面積に分ける曲線が、変曲点（測地的曲率が 0 になる点）を 4 つ以上持つことを「テニスボールの定理」と呼んだ（近い結果はセグレ 1968 にある）。単位球面の曲線を、赤道からのずれ $g(\varphi)$ と一様なずらし c で表し、北側の面積がちょうど 2π になるように c を決めた。

曲線	本数	変曲点の最小	最大	備考
二等分する曲線	1000	4	12	ちょうど 4 の割合 0.001
同じ形を北へずらした曲線	1000	0	--	0 の割合 0.005・2 の割合 0.015
中心対称な曲線	300	6	10	ちょうど 6 の割合 0.263

二等分する曲線の変曲点は、1000 本とも 4 以上の偶数だった。テニスボールの縫い目に似た $\theta = \pi/2 + 0.5 \cos 2\varphi$ は、ずらさずに北側の面積が 6.283185307 になり、変曲点はちょうど 4 だった。同じ形を北へずらして北側の面積を 2.737 から 2.999 に減らすと、変曲点が 0 や 2 のものが出た。奇数次の揺れだけでできた中心対称な曲線は、測った 300 本とも変曲点が 6 以上だった。

二等分の条件が何を消すかは、ガウス＝ボネの定理で分かる。単位球面では、測地的曲率の総和は 2π から囲む面積を引いたものになる（測った差は最大 1.8×10^{-15} ）。二等分なら総和が 0、つまり測地的曲率の平均が消え

る。平均が 0 なら符号は少なくとも 2 回入れ替わる。だが測ると 4 回以上だった。2 ではなく 4 になる理由は、本稿の道具では出さない。

8. 既刊との関係

論文224 は、多面体の角欠損の総和がいつも 4π であることを数えた。ここでは平面の閉曲線の曲率の総和がいつも 2π (二周するリマソンは 4π) で、球面の曲線では測地的曲率の総和が 2π から囲む面積を引いたものになった。

論文1014 は、配位の欠陥の総和は 12 で動かないのに、5 配位の個数は動くことを示した。ここでも、曲率の総和は動かないのに頂点の数は 4 から 16 まで動き、動かないのは下限の 4 だった。

論文67 は、 4π を 2π と球面のオイラー標数の積として読んだ。ここでは、曲線が何周するかが曲率の総和を決め、何周するかで頂点の下限も 4 から 2 に変わった。

論文1010 は、太陽から見た月の道がいつも凸であることを数えた。ここでは、凸の曲線の曲がり方がどれほど一様でいられないかを数えた。

論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、平面の四頂点の 4 と球面のテニスボールの 4 は、球面の側の仕組みを測っていないので、同根とは呼ばない。

測り方の誤りを二つ直したことも書いておく。組んだ曲線の曲率と $1/\rho$ の差を、測る前に 10^{-9} 未満と見込んで外れた (実測 2.5×10^{-9})。また、凸でない曲線の頂点の最大を一度 898 と数えた。曲率の微分がほぼ 0 の所で丸めの符号がばたついたのを頂点と数えていたので、最大の 10^{-9} 倍より小さい所を数えない形に直し、最大は 16 になった。

結び

結び：凸の閉曲線の頂点が 4 つ以上あるのは、閉じる条件が曲率半径の一次の揺れを消すからである。でたためな閉曲線 2000 本の頂点はどれも 4 以上の偶数で、自分と交わるリマソンだけが 2 つだった。曲率半径を接線の向きの関数として見ると、一次の成分は閉じるずれそのもので、閉じた曲線では 0 になり、残る最も低い揺れが二次なので符号は 4 回以上入れ替わる。一次の揺れが残る開いた弧は端が $\pi\epsilon$ ずれて閉じず、二周するリマソンには半分の振動数の揺れが残って、どちらも 2 で足りる。揺れが k 次から上だけなら頂点は $2k$ 以上で、下限は残っている最も低い揺れの 2 倍である。球面を二等分する曲線 1000 本の変曲点はどれも 4 以上で、二等分の条件は測地的曲率の総和を 0 にする。正直に書くと、仕組みを示したのは凸の曲線だけで、球面で 4 になる理由は出していない。分離子は、大域の条件が、曲がり方の関数からどの揺れを消すか。閉じる条件は一次を消して下限を 4 にし、二周して閉じる条件は半分の振動数を残して下限を 2 にする。

参考文献

1. Arnol'd, V. I. (1994). *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. American Mathematical Society.
2. DeTurck, D., Gluck, H., Pomerleano, D., & Vick, D. S. (2007). The Four Vertex Theorem and Its Converse. *Notices of the American Mathematical Society*.
3. Mukhopadhyaya, S. (1909). New Methods in the Geometry of a Plane Arc. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*.
4. Osserman, R. (1985). The Four-or-More Vertex Theorem. *The American Mathematical Monthly*.
5. Segre, B. (1968). Alcune proprietà differenziali in grande delle curve chiuse sghembe. *Rendiconti di Matematica*.
6. 山岸勇輝 (2025). 『 4π パッチのオイラー標数的起源』 [論文67]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/67> ・ DOI: 10.5281/zenodo.21642170
7. 山岸勇輝 (2026). どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である [論文224]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/224> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22120836
8. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
9. 山岸勇輝 (2026). 太陽から見た月の道はいつも凸で、凸が崩れる半径は地球と太陽の引きが釣り合う点とほぼ重なる [論文1010]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1010> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22823955
10. 山岸勇輝 (2026). トムソン問題の最適配置は分からないが、配位の欠陥の総和はいつも 12 である [論文1014]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1014> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22829288

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)