

二つの「アーノルドの舌」は同じ幕で開き、舌の中の指数の符号だけが逆である

— 円写像の p/q の舌は蹴りの q 乗、マシュー方程式の n 番目の舌は揺すりの n 乗で開き、どちらも中で回転数が有理数に固定される — 分離子は、固定された回転数のまわりで振幅が引き寄せられるか、育つか — [論文1077]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1077>

— From thinking to syncing. —

要旨

「アーノルドの舌」と呼ばれるものが二つある。一つは、回るものを周期的に蹴ったとき、回る速さが蹴りの有理数倍に引き込まれる範囲（円写像）。もう一つは、振り子の長さを周期的に揺すったとき、揺れが育つ範囲（マシュー方程式・ブランコの立ち漕ぎ）である。どちらも、強さを 0 に近づけると一点にしぼむ舌の形をしている。本稿は、この二つが同じ機構かを数で確かめる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、幅は同じ幕で開く。円写像の p/q の舌の幅は蹴りの強さの q 乗で開き（両対数の傾きは $q=1$ から 5 で 1.0000 から 4.9804 ）、マシュー方程式の n 番目の舌の幅は揺すりの強さの n 乗で開く（ $n=1$ から 4 で 0.9996 から 3.9998 ）。第二に、幕を決めるのは、必要な高調波が駆動から何次で出るかである。その高調波を駆動に直接入れると、二つとも幅は一次で開く（傾き 1.0447 と 0.9455 ）。第三に、これが本稿の芯である。舌の中の指数の符号だけが逆である。どちらの舌の中でも、回転数（マシューではフロケの位相）は $1/2$ に固定される。だが円写像のリアプノフ指数は -0.510826 で引き寄せられ、マシュー方程式のフロケ指数は 0.144236 で育つ。マシュー方程式は面積を保つ（モノドロミー行列の行列式 1 ）ので、乗数は育つものと縮むものの対で出る。第四に、舌の幅の和。蹴りが 0.5 なら、分母 30 までの舌の幅の和は 0.192113 で止まる。蹴りが 1 なら、分母を増やすほど和は増え続け、分母 30 で 0.641851 である。第五に、ブランコへ。長さを揺すって漕ぐなら、二倍の振動数で漕ぐ舌（ $n=1$ ）は、同じ振動数で漕ぐ舌（ $n=2$ ）より、揺すりの強さ 0.1 で 20.0759 倍広い。正直に書くのと、測り方の誤りを三つ直した。円写像では舌の真ん中が p/q からずれるのに真ん中を決め打ちしていたこと、マシュー方程式では探す範囲が別の不安定域にはみ出していたこと、実測の前に閾値を置いたことである。蹴りが 1 で舌が全部を埋めることは文献の結果で、本稿は分母 30 までで増え続けることを見ただけである。キーワード：アーノルドの舌、円写像、マシュー方程式、引き込み、パラメトリック励振、悪魔の階段、フロケ指数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。円写像とアーノルドの舌（アーノルド 1961）、完全な悪魔の階段とフラクタル次元（ジェンセン、バク、ボール 1983）、マシュー方程式の安定図とその舌（コヴァチッチ、ランド、サー 2018 の整理）は、いずれも既知である。定理を証明しない。舌の幅を測って冪を並べ、中の指数の符号を数えるまでである。完全な悪魔の階段を示さない。蹴りが 1 で舌が全部を埋めることと、残りのフラクタル次元 0.87 は文献の結果として引くだけである。本稿は分母 30 までで和が増え続けることを見ただけである。二つの舌を同根とは呼ばない。幅の冪は同じ仕組みで決まるが、中の指数の符号は別の所（面積を保つかどうか）で決まるからである。カオスに立ち入らない。蹴りが 1 を超える円写像も、減衰や非線形のあるマシュー方程式も扱わない。実在の系に広げない。心臓・潮・回路は扱わない。ブランコについても、長さを揺すって漕ぐ場合だけを言い、座り漕ぎ（強制振動）には何も言わない。既刊との関係：論文351 は射程注記で、マシュー方程式の安定領域（アーノルドの舌）の厳密な理論には立ち入らず、名前を挙げるにとどめていた。本稿はその射程注記の席に座り、舌の幅と中の指数を数える。同じ射程注記の減衰の項には論文584 が座った。論文695 は、体の時計が毎日合わせられれば足りることを、引き込みの幅で示した。そこで扱った幅は 1:1 の一枚で、強さに比例する。ここでは有理数ごとに舌があり、その幅が強さの次数乗で開くことを見る。論文313 は、体系の「同期」の五つ目の意味（引き込み）だけが閾値を持つことを示した。ここでの舌は、強さ 0 から開くので閾値を持たない。論文1075 は、標準写像で黄金比の回転数の曲線が最後まで残ることを数えた。ここでは蹴りが 0.5 のとき、舌に入らない Ω の割合が 0.807887 残り、そこは回転数が無理数の動きである。論文300 は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、二つの舌は幅の冪を同じ仕組みで持つが、指数の符号を動かすものが違うので、同根とは呼ばない。加えたのは、二つの舌の幅を同じ手順で測って冪を並べたこと、マシュー方程式の境を固有値と数値積分の二つの方法で一致させたこと、必要な高調波を直接入れて冪が一次になることを見たこと、舌の中の回転数の固定と指数の符号を並べたこと、舌の幅の和を蹴り 0.5 と 1 で比べたこと、測り方の誤りを記録したことである。

1. 問いと答えの形

回るもの（振り子、心臓、時計）を周期的に蹴ると、回る速さが蹴りの有理数倍に引き込まれることがある。引き込まれる範囲を、蹴りの振動数と強さの平面に描くと、強さ 0 の一点から上へ開く舌の形になる。これが円写像のアーノルドの舌である。

一方、振り子の長さを周期的に揺ると、ある振動数の範囲で揺れが育つ。ブランコの立ち漕ぎがこれで、論文351 は固有振動数の二倍で漕ぐことを示した。育つ範囲を描いても、やはり舌の形になり、同じく「アーノルドの舌」と呼ばれる。

同じ形で同じ名前の二つは、同じ機構なのか。本稿は、幅の開き方は同じ仕組みで決まるが、舌の中で起きることは逆である（片方は引き寄せられ、片方は育つ）ことを、数で確かめる。

2. 二つの舌と測り方

円写像は

$$\theta' = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta$$

で、 Ω は蹴りの振動数の比、 K は蹴りの強さである。回転数（一回あたりに θ が進む量の平均）が p/q に固定される Ω の範囲が、 p/q の舌である。 q 回まわした写像から $\theta + p$ を引いたものが、 θ のどこかで 0 になれば引き込まれている。その最大と最小が 0 になる Ω を別々に二分して、舌の左右の境を出した。

マシュー方程式は

$$x'' + (\delta + \varepsilon \cos t) x = 0$$

で、 δ は固有振動数の二乗、 ε は揺すりの強さである。 n 番目の舌は $\delta = (n/2)^2$ から出る。境では解がちょうど周期的になるので、解をフーリエ級数で書いたときの固有値（マシュー方程式の特性値）として境を出した。

測り方の確かめを二つした。円写像の $0/1$ の舌の幅は厳密に K/π で、測った幅との差（ $K = 0.05$ で 4.909×10^{-9} ）は、 θ を 4000 に刻んだ格子の上で最大と最小を取る誤差の見積もりと、残り 7.4×10^{-17} まで一致した。マシュー方程式では、固有値で出した境（ $\varepsilon = 0.1$ の $n = 1$ で 0.198780967 と 0.298718515 ）で、数値積分したモノドロミー行列の跡の大きさがちょうど 2 になった（差は最大 6.1×10^{-13} ）。二つの独立な方法が一致している。

3. 幅は同じ幂で開く

蹴りと揺すりの強さを変えて、舌の幅を測った。

舌	強さ 0.05	強さ 0.1	強さ 0.2	両対数の傾き
円写像 0/1	1.592×10^{-2}	3.183×10^{-2}	6.366×10^{-2}	1.0000
円写像 1/2	1.989×10^{-4}	7.951×10^{-4}	3.173×10^{-3}	1.9978
円写像 1/3	4.385×10^{-6}	3.504×10^{-5}	2.792×10^{-4}	2.9963
円写像 1/4	1.326×10^{-7}	2.116×10^{-6}	3.350×10^{-5}	3.9906
円写像 1/5	5.080×10^{-9}	1.617×10^{-7}	5.063×10^{-6}	4.9804

舌	強さ 0.02	強さ 0.05	強さ 0.1	両対数の傾き
マシュー $n = 1$	2.000×10^{-2}	4.999×10^{-2}	9.994×10^{-2}	0.9996
マシュー $n = 2$	2.000×10^{-4}	1.249×10^{-3}	4.978×10^{-3}	1.9975
マシュー $n = 3$	5.000×10^{-7}	7.811×10^{-6}	6.245×10^{-5}	2.9995
マシュー $n = 4$	5.555×10^{-10}	2.170×10^{-8}	3.471×10^{-7}	3.9998

円写像の p/q の舌は蹴りの q 乗で、マシュー方程式の n 番目の舌は揺すりの n 乗で開く。傾きと次数の差は、円写像で最大 0.0196、マシュー方程式で最大 0.0025 だった。

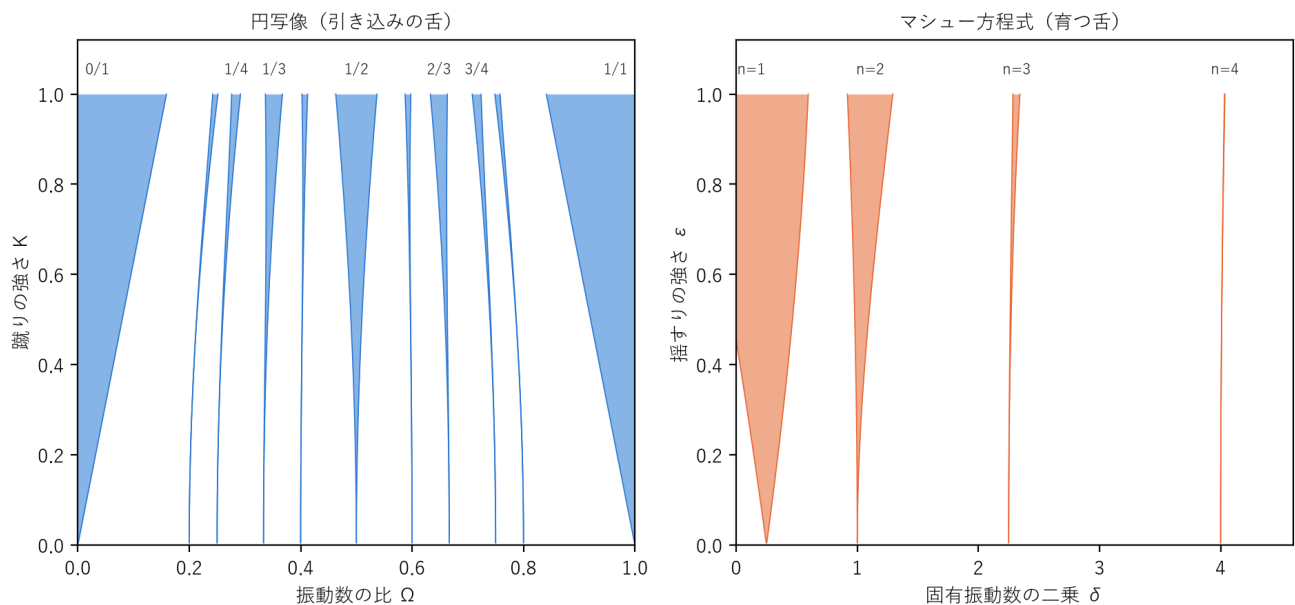


図1：二つのアーノルドの舌。左は円写像（横が振動数の比、縦が蹴りの強さ）で、分母5までの有理数ごとに引き込まれる範囲を塗った。右はマシュー方程式（横が固有振動数の二乗、縦が揺すりの強さ）で、揺れが育つ範囲を塗った。

4. 冪を決めるのは、必要な高調波が何次で出るかである

円写像の蹴りは $\sin 2\pi\theta$ で、一番目の高調波しか持たない。1/2 に引き込むには二番目の高調波が要り、それは蹴りを二回重ねて初めて出る。マシュー方程式の揺すりも $\cos t$ で、二番目の舌には $\cos 2t$ が要り、それは揺すりを二回重ねて初めて出る。

そこで、必要な高調波を駆動に直接入れて測り直した。円写像に二番目の高調波を 0.5 の割合で足すと、1/2 の舌の傾きは 1.9978 から 1.0447 に下がった。マシュー方程式に $\cos 2t$ を 0.5 の割合で足すと、 $n = 2$ の舌の傾きは 1.9975 から 0.9455 に下がった。二つの舌の冪は、同じ仕組みで決まっている。

5. 舌の中では回転数が固定され、指数の符号は逆である

円写像 ($K = 0.8$) と、マシュー方程式 ($\varepsilon = 0.3$) の、 $1/2$ の舌の中と外を並べた。マシュー方程式の「回転数」は、モノドロミー行列の跡から出るフロケの位相である。

系	場所	回転数・位相	指数
円写像	$\Omega = 0.50$ (舌の中)	0.500000	-0.510826
円写像	$\Omega = 0.45$ (舌の外)	0.452195	+0.000020
円写像	$\Omega = 0.40$ (舌の外)	0.393773	+0.000043
マシュー	$\delta = 0.20$ (舌の中)	0.500000	+0.146622
マシュー	$\delta = 0.25$ (舌の中)	0.500000	+0.144236
マシュー	$\delta = 0.30$ (舌の中)	0.500000	+0.126402
マシュー	$\delta = 0.40$ (舌の外)	0.446982	+0.000000

どちらの舌の中でも、回転数は $1/2$ に固定される。舌の外では、回転数は有理数に止まらず、指数はほぼ 0 である。違うのは舌の中の指数の符号で、円写像では負（近くの方が引き寄せられる）、マシュー方程式では正（揺れが育つ）である。

マシュー方程式は面積を保つ。 $\delta = 0.25$ のモノドロミー行列の行列式は 1.000000000000 で、二つの乗数は -0.404032930 と -2.475045786 （積は 1 ）だった。舌の中では、育つ解と縮む解がいつも対で出る。円写像の引き込みには縮む向きしかない。

6. 舌の幅の和

分母 Q までのすべての有理数の舌の幅を足した。

蹴りの強さ	分母 5 まで	分母 10 まで	分母 20 まで	分母 30 まで
$K = 0.5$	0.191133	0.192053	0.192113	0.192113
$K = 1$	0.524188	0.585892	0.629319	0.641851

蹴りが 0.5 のとき、分母を 20 から 30 に増やしても和は 2.5×10^{-8} しか増えない。舌に入らない 0.807887 が残り、そこでは回転数が無理数である。蹴りが 1 のときは、分母を 20 から 30 に増やすと和が 0.012532 増え、止まらない。分母 30 で残りは 0.358149 である。

蹴りが 1 では舌が全部を埋め（完全な悪魔の階段）、残る点の集まりのフラクタル次元は 0.87 であることが知られている（ジェンセン、バク、ボール 1983）。本稿はその結果を引くだけで、分母 30 までで和が止まらずに増えることを見ただけである。

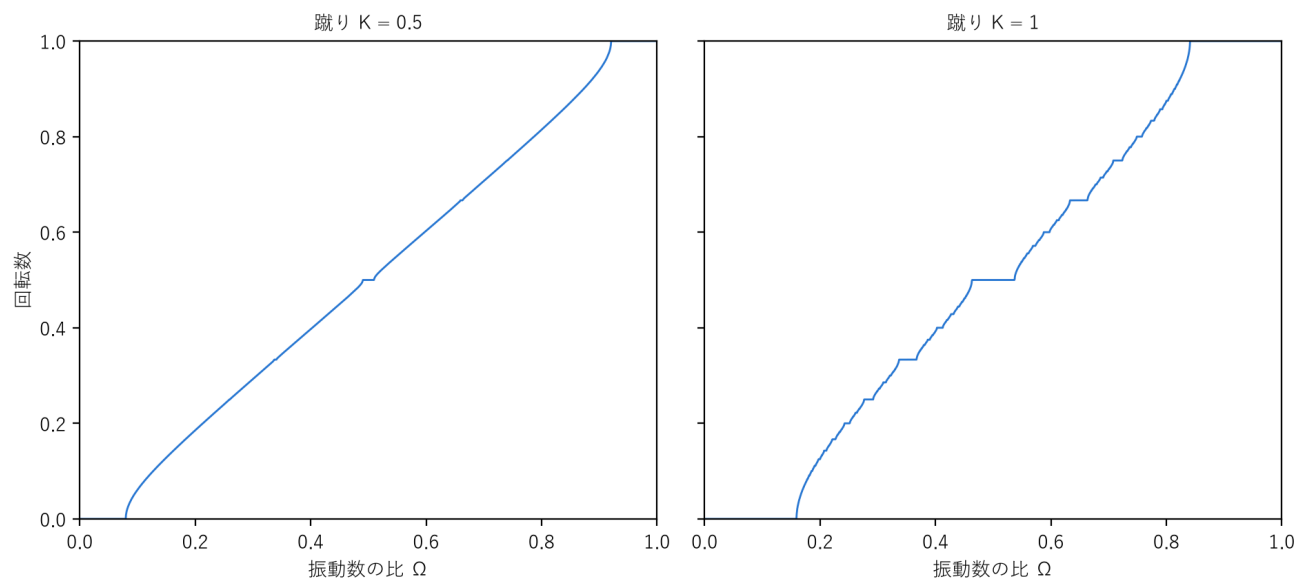


図2：円写像の回転数と振動数の比（悪魔の階段）。左は蹴り 0.5、右は蹴り 1。平らな段が舌の中（回転数が有理数に固定される）で、蹴り 1 のほうが段が広い。

7. ブランコへ

論文351 は、立ち漕ぎが長さを揺すって漕ぐパラメトリック励振で、固有振動数の二倍で漕ぐことを示した。マシュー方程式でいえば、二倍の振動数で揺するのが $n = 1$ の舌、同じ振動数で揺するのが $n = 2$ の舌である。

揺すりの強さ	$n = 1$ （二倍）	$n = 2$ （同じ）	比
0.05	0.049992	0.001249	40.0381
0.10	0.099938	0.004978	20.0759
0.20	0.199502	0.019657	10.1493

揺すりが弱いほど、二倍の振動数の舌のほうが広い。 $n = 1$ の幅は揺すりに比例し、 $n = 2$ の幅は揺すりの二乗に比例するからである。長さを揺すって漕ぐなら、二倍の振動数が一番合わせやすい。座り漕ぎ（外から力を加える強制振動）は別の機構で、本稿は何も言わない。

8. 既刊との関係

論文351は射程注記で、マシュー方程式の安定領域（アーノルドの舌）の厳密な理論には立ち入らず、名前を挙げるにとどめていた。本稿はその射程注記の席に座り、舌の幅と中の指数を数えた。同じ射程注記の減衰の項には論文584が座り、減衰の効きが周期比で逆向きになることを示している。

論文695は、体の時計が毎日合わせられれば足りることを、引き込みの幅で示した。そこで扱った幅は1:1の一枚で、強さに比例した。ここでは有理数ごとに舌があり、その幅が強さの次数乗で開いた。

論文313は、体系の「同期」の五つ目の意味（引き込み）だけが閾値を持つことを示した。ここでの舌は強さ0から開くので、閾値を持たない。

論文1075は、標準写像で黄金比の回転数の曲線が最後まで残ることを数えた。ここでは蹴りが0.5のとき、舌に入らない Ω の割合0.807887が、回転数が無理数の動きとして残った。

論文300は、同根か別根かは判定できると示した。その基準で、二つの舌は幅の冪を同じ仕組み（必要な高調波が何次で出るか）で持つが、中の指数の符号を動かすもの（面積を保つか）が違うので、同根とは呼ばない。

測り方の誤りを三つ直したことも書いておく。円写像の分母3以上で、舌の真ん中を p/q と決め打ちして二分し、幅でなく真ん中のずれを測っていた（真ん中は蹴りの二乗の程度ずれる）。マシュー方程式の一番目の舌を数値積分で探したとき、探す範囲が $\delta < 0$ の別の不安定域にはみ出し、三番目より上では真ん中が舌の外にあった。そこで固有値で境を出す方法に替え、数値積分は確かめに回した。三つ目は、0/1の幅と K/π の差に、実測の前に閾値を置いたことである。

結び

結び：二つの「アーノルドの舌」は同じ冪で開き、舌の中の指数の符号だけが逆である。円写像の p/q の舌は蹴りの q 乗、マシュー方程式の n 番目の舌は揺すりの n 乗で開き、冪は必要な高調波が駆動から何次で出るかで決まる（直接入れると一次になる）。どちらの舌の中でも回転数は1/2に固定されるが、円写像のリュブノフ指数は-0.510826で引き寄せられ、マシュー方程式のフロケ指数は0.144236で育つ。マシュー方程式は面積を保ち、乗数は育つものと縮むものの対で出る。蹴りが0.5なら舌の幅の和は0.192113で止まり、蹴りが1なら分母を増やすほど増え続ける。長さを揺すって漕ぐブランコでは、二倍の振動数の舌が同じ振動数の舌より、揺すり0.1で20.0759倍広い。正直に書くと、完全な悪魔の階段は文献の結果で、本稿は分母30までを見ただけである。分離子は、固定された回転数のまわりで振幅が引き寄せられるか、育つか。舌の形と冪を決める仕組みは同じで、中で起きることは逆である。

参考文献

1. Arnol'd, V. I. (1961). Small Denominators. I. Mapping the Circle onto Itself. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya*.
2. Jensen, M. H., Bak, P., & Bohr, T. (1983). Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map. *Physical Review Letters*.
3. Kovacic, I., Rand, R. H., & Sah, S. M. (2018). Mathieu's Equation and Its Generalizations: Overview of Stability Charts and Their Features. *Applied Mechanics Reviews*.
4. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/300> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22171914
5. 山岸勇輝 (2026). 体系は「同期」を四つの意味で使ってきて、五つ目だけが閾値を持つ [論文313]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/313> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22174953
6. 山岸勇輝 (2026). ブランコの立ち漕ぎと座り漕ぎは、二つの機構である [論文351]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/351> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22695649
7. 山岸勇輝 (2026). 免震層の減衰を増やすと、伝わる揺れがかえって増える側がある [論文584]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/584> ・ DOI: 10.5281/zenodo.23014359
8. 山岸勇輝 (2026). 体の時計は正確である必要がない。毎日合わせられれば足りる [論文695]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/695> ・ DOI: 10.5281/zenodo.23014881
9. 山岸勇輝 (2026). 黄金比の回転数の曲線は、部分商が2 や3 の数の曲線より強い蹴りまで残る [論文1075]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1075>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)