

光の尖りの明るさは、そこで重なる光線の数で育ち方が決まる

— 虹（二本が重なる折り目）は波の数の $1/3$ 乗、コーヒーカップの模様の尖点（三本）は $1/2$ 乗で明るくなり、全部が重なる放物面鏡の焦点の 1 乗は少し傾けるだけで壊れる — 分離子は、一点で何本の光線が重なるか — [論文1078]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年10月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/1078>

— From thinking to syncing. —

要旨

光線が集まって明るくなる線を焦線（コースティクス）という。虹も、コーヒーカップの底に映る光の模様も焦線である。光線だけで考えると、焦線の上の明るさは無限大になる。波として考えると明るさは有限になり、波の数を大きくするほど明るくなる。本稿は、その育ち方が何で決まるかを数える。新しい定理も法則も主張しない。第一に、重なる光線の数。虹では、明るい側に二本、暗い側に **0** 本の光線が来る（折り目）。コーヒーカップの模様では、尖った所の内側で三本、外側で一本の光線が通る（尖点）。第二に、育ち方は重なる光線の数で決まる。虹のいちばん明るい所は波の数の **0.3388** 乗、コーヒーカップの模様の尖点は **0.4967** 乗、光線が全部一点に集まる放物面鏡の焦点は **1.0000** 乗で明るくなった。**m** 本が重なるとき位相は **m+1** 乗で曲がり出し、明るさは $1 - 2/(m+1)$ 乗で育つ（二本で $1/3$ 、三本で $1/2$ ）。第三に、過剰虹。虹の内側に並ぶ明るい縞の間隔は、水滴の大きさ（**ka**）の **-0.6660** 乗で狭くなり、エアリーの見積もりとの比は **0.999675** まで **1** に寄った。一つの色で、半径 **0.1 mm** の水滴なら **1.9897** 度、**1 mm** なら **0.4269** 度である。第四に、これが本稿の芯である。完全な焦点は壊れ、尖点が残る。放物面鏡の焦点の **1** 乗は、光を **0.02** ラジアン傾けるだけで壊れ、尖点のない一本の焦線になって、育ち方は **0.2667** 乗から **0.3185** 乗に落ちた。円の鏡を楕円にしても尖点残り、**0.4929** 乗で育った。正直に書くと、測り方の誤りを五つ直した。平面で安定に残る焦線が折り目と尖点だけだという分類は文献の結果で、本稿は一つの傾きと一つの楕円で確かめただけである。フレネル係数・偏光・色の混ざり・太陽の大きさは入れていないので、過剰虹が実際に見えるかは言わない。キーワード：焦線、コースティクス、虹、過剰虹、エアリー積分、ピアシー積分、尖点、特異点の分類。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。焦線の明るさのエアリーの理論（エアリー 1838）、尖点のまわりの波（ピアシー 1946）、特異点の分類（アーノルド 1975）、焦線の光学（ベリー、アップスティル 1980）は、いずれも既知である。分類を証明しない。平面で安定に残るのが折り目と尖点だけだという結果は文献から引くだけで、本稿は放物面鏡を一つの角だけ傾け、円の鏡を一つの楕円に変えて確かめただけである。光学の全体を作らない。波はスカラーで、フレネル係数・偏光・吸収を入れない。鏡は平面の中の曲線（円柱の鏡）である。過剰虹が見えるかを言わない。計算は一つの色だけで、色の混ざりと太陽の円盤の大きさは扱わない。三つの冪を同根とは呼ばない。 $1/3 \cdot 1/2 \cdot 1$ は、位相が何乗で平らになるかという一つの勘定の、別の場合だからである。三次元の焦線に広げない。燕尾や臍点など、面の上の焦線は扱わない。既刊との関係：論文325は射程注記で、過剰虹はエアリー理論に属するとして扱わなかった。本稿はその射程注記の席に座る。論文325は虹の角度に水滴の大きさが入らないことを示した。ここでは大きさが、虹の明るさ（ $1/3$ 乗）と過剰虹の間隔（ $-2/3$ 乗）に入ることを見る。論文198は、光の焦線と共役点と同じ方程式の同じ零点であることを示した。ここでは焦線の形（折り目か尖点か）と、波にしたときの明るさの育ち方を数える。加えたのは、虹とコーヒーカップの模様で光線の数一数えたこと、明るさの育ち方を虹・折り目・尖点・焦点で並べたこと、過剰虹の間隔をエアリーの見積もりと突き合わせたこと、完全な焦点が傾きで壊れ、尖点が楕円でも残ることを測ったこと、測り方の誤りを記録したことである。

1. 問いと答えの形

晴れた日にコーヒーカップをのぞくと、底に明るい曲線が映り、真ん中で尖っている。雨上がりの虹も、光線が集まってできる明るい線である。光線だけで考えると、光線が接し合う線（包絡線）の上では明るさが無限大になる。これを焦線（コースティクス）という。

実際の光は波なので、明るさは有限にとどまる。ただし波の数（波長の逆数に大きさを掛けたもの）を大きくするほど、焦線は明るくなる。本稿は、その育ち方が何乗かを、虹・コーヒーカップ・放物面鏡・楕円の鏡で数える。答えは、一点で何本の光線が重なるかで決まる、である。

2. 一つの水滴と三つの鏡

水滴（屈折率 1.3330）の中で一回反射して出てくる光の偏角を $D(b)$ とする。 b は入射の高さを水滴の半径で割ったものである。偏角が最小になる高さは $b_0 = 0.860835060$ で、最小の偏角は 137.921892620 度、180 度から引いた虹の角は 42.078107 度（論文325 と同じ値）である。

波の計算では、光線の曲がり位相の傾きになることを使い、位相を偏角の積分として書いた。

$$I(\theta) = \frac{ka}{2\pi} \left| \int w(b) e^{ika\Phi(b,\theta)} db \right|^2, \quad \Phi(b,\theta) = \int_{b_0}^b (D(b') - \theta) db'$$

w はなめらかな窓で、端の回折が効かないようにした。フレネル係数などの振幅の重みは入っていない。

鏡は、半径 1 の円の右半分（コーヒークップの内側）、楕円（長い半径 1・短い半径 0.8）、放物線（焦点までの長さ 0.5）である。そこへ平面波を当て、反射した光だけを

$$\Psi(P)=\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int w\frac{e^{ikS}}{\sqrt{|P-m|}}dl$$

で足し合わせた。 S は入射の位相と、鏡の点 m から点 P までの道のりの和である。

測り方を五つ確かめた。エアリー積分を、曲げた道で数値積分すると Ai と差 1.24×10^{-10} で合った。ピアシー積分の原点は、閉じた形 $2\Gamma(5/4)e^{i\pi/8}$ と差 1.19×10^{-11} で合った。円の鏡の反射光線の包絡線は、閉じた形のネフロイドと差 1.40×10^{-10} で合った。放物面鏡では焦点までの道のりの散らばりが 1.11×10^{-16} で、全部の光線が一点に集まる。円の鏡の尖点 (0.5, 0) では、道のりが 1.5 から φ の 4 乗の $-1/4$ 倍だけずれる（ -0.250022 、 -0.249994 、 -0.249995 ）。

3. 重なる光線の数

場所	来る光線の数	焦線の種類
虹：偏角 136.776 度（暗い側）	0	
虹：偏角 139.068 度（明るい側）	2	折り目の境
虹：偏角 155.111 度	2	
虹：偏角 174.270 度（ $D(1)$ より後ろ）	1	
カップ：(0.45, 0)（尖点の手前）	1	
カップ：(0.55, 0)（尖点の内側）	3	尖点の内側
カップ：(0.7, 0.05)	3	
カップ：(0.7, 0.3)	1	

虹の偏角の端は $D(0) = 180.000000$ 度と $D(1) = 165.573494$ 度で、最小の偏角の手前では光線が 0 本、越えると 2 本になる。二本が一本に重なって消える境が折り目である。コーヒークップの内側の格子 1193 点では、通る反射光線が 1 本の点が 1050、3 本の点が 143 で、それ以外はなかった。三本の領域の先端が尖点で、そこで三本が一点に重なる。

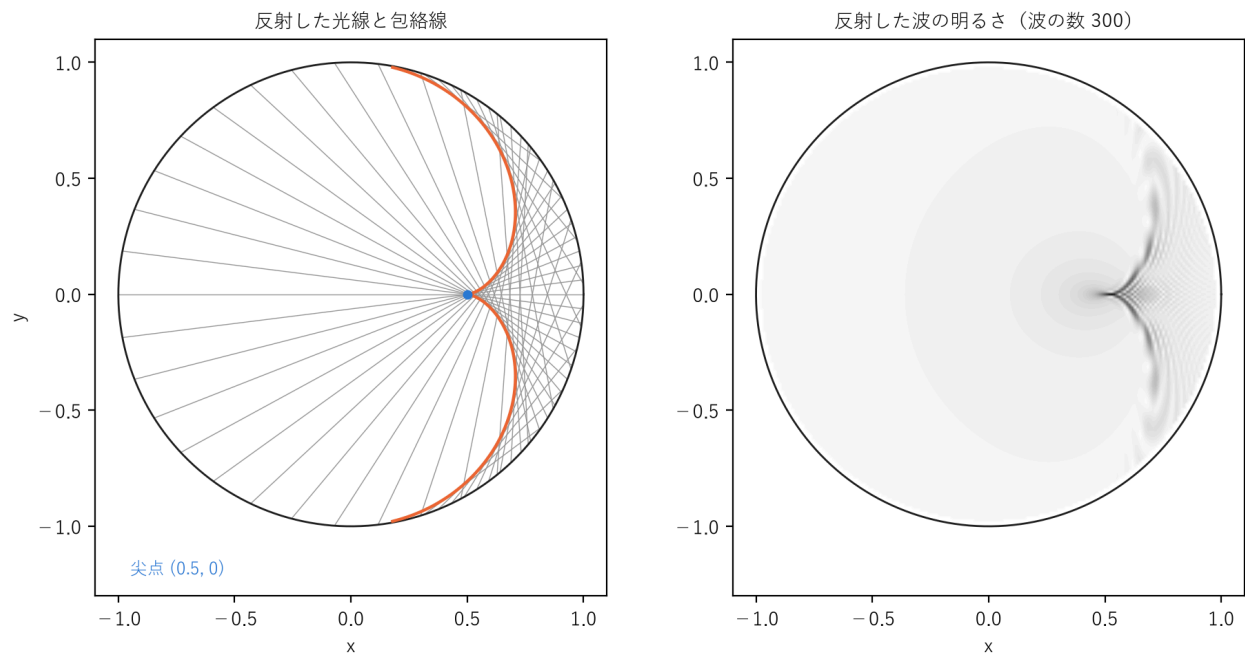


図1：コーヒークップの内側の光。左は円の鏡で反射した光線と、その包絡線（ネフロイド・尖点は (0.5, 0)）。右は同じ鏡で反射した波の明るさ（波の数 300・明るいほど濃い）。光線の包絡線に沿って明るい線が出て、尖点で最も明るい。

4. 明るさは何乗で育つか

波の数 k （虹では ka ）を 4 倍ずつ大きくして、明るさを測った。

場所	重なる光線	1 番目	2 番目	3 番目	4 番目	両対数の傾き
虹のいちばん明るい所	2	7.663170	12.385132	19.747479	31.396932	0.3388
カップの折り目の点	2	17.6413	28.3294	44.9713	71.3875	0.3358
カップの尖点	3	47.5407	94.3147	187.8745	374.9968	0.4967
尖りでない点 (0.3, 0.3)	1	1.1189	1.1187	1.1187	1.1187	育たない

虹は $ka = 2000$ から 128000、折り目の点も $k = 2000$ から 128000、尖点と尖りでない点は $k = 500$ から 32000 である。折り目の点は、円の鏡で反射した光線 $\varphi = 0.5$ の包絡線の点 (0.640503, 0.110195) で、その点を通る三本目の光線 ($\varphi = -0.707388$) は窓の外に置いて、重なる二本だけを測った。尖りでない点の明るさは、最大と最小の比が 1.0001 で動かない。

育ち方の違いは、位相がどれだけ平らかで説明できる。 m 本の光線が一点で重なるとき、位相はそこで $m + 1$ 乗で曲がり出す。すると積分の大きさは k の $1/2 - 1/(m + 1)$ 乗になり、明るさはその二乗で

$$I \propto k^{1-2/(m+1)}$$

で育つ。二本（折り目）なら 1/3、三本（尖点）なら 1/2 で、位相がどこまでも平らな完全な焦点では 1 に近づく。虹と折り目の点の傾きは 1/3 に、尖点の傾きは 1/2 に近い。

5. 過剰虹の間隔

虹の内側には、明るい縞（過剰虹）が並ぶ。一番目と二番目の明るい所の間を、波の計算とエアリーの見積もりで比べた。エアリーの見積もりは、偏角の最小のまわりの曲がり $D''(b_0) = 9.798390$ と、Ai の微分の零点 $-1.018793 \cdot -3.248198$ から作った。

ka	波の計算（度）	エアリーの見積もり（度）	比
2000	1.362654	1.366679	0.997055
8000	0.541214	0.542367	0.997874
32000	0.215101	0.215238	0.999361
128000	0.085390	0.085417	0.999675

間隔の両対数の傾きは -0.6660 で、 ka の $-2/3$ 乗に近い。比は水滴が大きくなるほど 1 に寄った。論文325 は虹の角度に水滴の大きさが入らないことを示したが、明るさと過剰虹の間隔には大きさが入る。

波長 0.55 マイクロメートルの一つの色で、実際の大きさの水滴を計算した。

半径	ka	いちばん明るい所のずれ（度・内側へ）	二番目までの間（度）
0.1 mm	1142.4	0.8651	1.9897
0.5 mm	5712.0	0.3072	0.6776
1.0 mm	11424.0	0.1946	0.4269

小さい水滴ほど、いちばん明るい所は幾何の虹の角より内側にずれ、過剰虹の間隔は広い。実際に過剰虹が見えるかは、色の混ざりと太陽の大きさで決まり、本稿は扱わない。

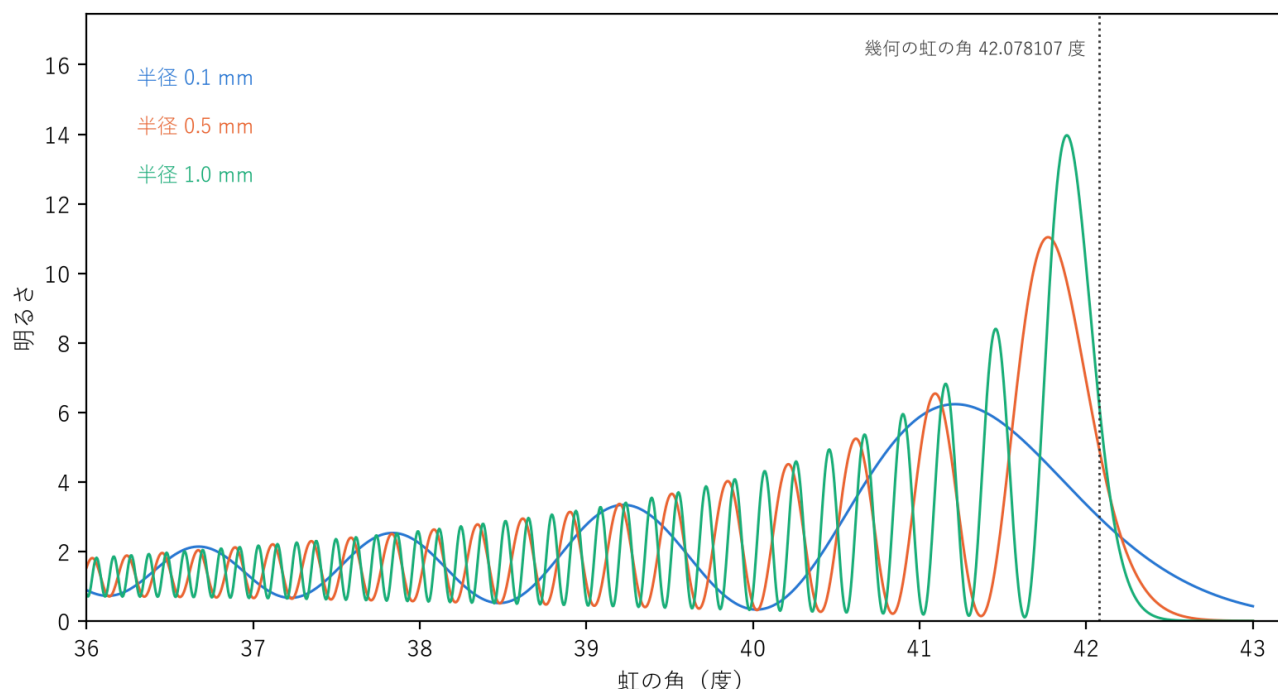


図2：虹の明るさと角度（一つの色）。横は虹の角（180 度から偏角を引いたもの）、縦は明るさ。水滴の半径 0.1 mm・0.5 mm・1 mm。点線は幾何の虹の角 42.078107 度。小さい水滴ほど、いちばん明るい所が内側にずれ、過剰虹の縞の間隔が広い。

6. 完全な焦点は壊れ、尖点が残る

鏡	$k = 500$	$k = 2000$	$k = 8000$	傾き
放物面鏡の焦点（まっすぐ）	114.3325	457.3300	1829.3199	1.0000
放物面鏡を 0.02 ラジアン傾けた焦線の上の最大	104.9054	159.3065	239.1002	0.2667～0.3185
楕円の鏡の尖点 (0.680000, 0)	48.4064	95.1691	188.7236	0.4929

放物面鏡では全部の光線が一点に集まるので、明るさは k の 1 乗で育つ。だが光を 0.02 ラジアン傾けると、焦線は長さのある一本の曲線になり、その上の速さは最小でも 3.000×10^{-2} で 0 にならない（尖点がない）。焦線の上でいちばん明るい所は、 $k = 500$ から 128000 まで 346.0738、538.2090 と続き、隣どうしの傾きは 0.3014、0.2929、0.2667、0.3185 で、折り目の 1/3 の近くに落ちた。 $k = 8000$ では、まっすぐなら 1829.3199、傾けると 239.1002 である。

一方、円の鏡を楕円にしても、軸上の点 $x = 1 - 0.8^2/2 = 0.680000$ に尖点残り、明るさは 0.4929 乗で育った（円の尖点は 0.4967 乗）。全部の光線を一点に集めるには、位相がすべての次数で平らでなければならず、少

しの傾きでその条件が崩れる。尖点は三本が重なるだけなので、鏡の形を少し変えても場所が動くだけで残る。平面で安定に残る焦線が折り目と尖点だけであることは、アーノルドの特異点の分類（アーノルド 1975）の結果として知られている。本稿は、一つの傾きと一つの楕円で、その振る舞いを数で確かめただけである。

7. 既刊との関係

論文325は射程注記で、干渉による副次的な縞（過剰虹）はエアリー理論に属するとして扱わなかった。本稿はその射程注記の席に座り、過剰虹の間隔と虹の明るさを波で数えた。論文325は虹の角度に水滴の大きさが入らないことを示した。ここでは、大きさが明るさ（ $1/3$ 乗）と間隔（ $-2/3$ 乗）に入った。論文325は分離子を「幾何光学が使えるか」に置いたが、その境の内側で何が起きるかを、ここで数にした。

論文198は、光の焦線と共役点と同じ方程式の同じ零点であることを示した。ここでは、その零点の形（二本が重なる折り目か、三本が重なる尖点か）と、波にしたときの明るさの育ち方を数えた。

三つの冪（ $1/3 \cdot 1/2 \cdot 1$ ）は、位相が何乗で平らになるかという一つの勘定の別の場合なので、同根とは呼ばない。

測り方の誤りを五つ直したことも書いておく。一つ目は、円の鏡の光線を数える格子がちょうど $\varphi = 0$ を含み、そこで符号の変化を二次数えて、1本を2本、3本を4本と数えたことである。二つ目は、虹の光線を $b = 0.3$ から数えて、真後ろ側の一本を落としたことである。三つ目は、過剰虹を探す範囲が狭く、二番目の明るい所が入らなかったことである。四つ目は、折り目の点を $k = 500$ から測ったとき、窓の幅が光線の対の合流の幅と同じくらいで、傾きが $1/3$ より小さく出たことである。 k を大きい側に取り直して 0.3358 になった。五つ目は、傾けた放物面鏡のいちばん明るい所を平面の格子で探したとき、格子の粗さで傾きが大きくばらついたことである。焦線の上で測る形に替えた。

結び

結び：光の尖りの明るさは、そこで重なる光線の数で育ち方が決まる。虹（二本が重なる折り目）は波の数の 0.3388 乗、コーヒーカップの模様の尖点（三本）は 0.4967 乗で明るくなり、 m 本が重なるとき明るさは $1 - 2/(m+1)$ 乗で育つ。過剰虹の間隔は水滴の大きさの -0.6660 乗で狭くなり、エアリーの見積もりとの比は 0.999675 まで 1 に寄った。虹の角度に大きさは入らないが、虹の明るさと過剰虹の間隔には入る。放物面鏡の完全な焦点の 1 乗は、 0.02 ラジアン傾けるだけで壊れて尖点のない焦線になり、育ち方は 0.2667 乗から 0.3185 乗に落ちた。楕円の鏡でも尖点は残り、 0.4929 乗で育った。正直に書くと、平面で安定なのが折り目と尖点だけだという分類は文献の結果で、本稿は一つの傾きと一つの楕円で確かめただけである。分離子は、一点で何本の光線が重なるか。二本なら $1/3$ 乗、三本なら $1/2$ 乗で、全部が重なる焦点は壊れやすい。

参考文献

1. Airy, G. B. (1838). On the Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*.
 2. Arnol'd, V. I. (1975). Critical Points of Smooth Functions and Their Normal Forms. *Russian Mathematical Surveys*.
 3. Berry, M. V., & Upstill, C. (1980). Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and Their Diffraction Patterns. *Progress in Optics*.
 4. Pearcey, T. (1946). The Structure of an Electromagnetic Field in the Neighbourhood of a Cusp of a Caustic. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*.
 5. 山岸勇輝 (2026). 「まっすぐ」は「最短」を意味せず、柵は二つある [論文198]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/198> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22107954
 6. 山岸勇輝 (2026). 虹の角度に、水滴の大きさは入っていない [論文325]. YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/325> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22209848
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)