

次元上昇の幾何学 — π の冪はなぜ次元とともに上がるか、王道トポロジーのセンサス — [論文109]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

物理・数学の式には、次元によって π の現れ方が質的に違うという観察がある——3次元では 4π や 8π (アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$)、4次元では π^2 を含む係数 (QEDの1ループ $1/16\pi^2$ 、4次元ガウス=ボネの $1/32\pi^2$ 、インスタント数の $1/8\pi^2$)。本稿は、この観察を第2層のセンサス (既存定理の一覧) として整理する。本稿の芯は、特定の数字 ($8\pi \rightarrow 16\pi^2$) ではなく、「 π の冪が次元とともに上がる」という一本の縦糸だ。その幾何学的な必然は、球面の体積の再帰公式 $\text{Vol}(S^n) = \frac{2\pi}{n-1} \text{Vol}(S^{n-2})$ にある——次元が2つ上がるごとに π が一つ増える ($S^2: 4\pi \rightarrow S^3: 2\pi^2 \rightarrow S^5: \pi^3$)。この一つの構造を、確立された複数の定理が異なる角度から照らす：チャーン=ヴェイユ/トランスグレーション (3D境界のチャーン=サイモンズと4Dバルクの c_2 を $dCS = \text{tr}(F \wedge F)$ が繋ぐ=論文92の一般化ストークスの実例)、APS指数定理 (4Dバルクの指数と3D境界の η 不変量=論文70の子)、そしてホップ束 ($S^3 \rightarrow S^2$ 、ただし後述のとおり単純な積ではない)。最重要の規律： 8π と $16\pi^2$ を「統一した」とは書かない——別根 (論文86) だ。 π^2 を生む根は解析 (ループ積分)・トポロジー (特性類)・幾何 (ファイバー束) の三つに分かれ、同じ数を共有するのは共鳴 (署名) であって証明ではない (論文100)。係数が $8\pi^2/16\pi^2/32\pi^2$ と規約で変わることも正直に記す (本質は π の冪であって数字ではない)。射程：確立された幾何・トポロジーの構造的解釈 (第2層) で、新しい数学も予言も生まず、「なぜ3+1次元か」は解かない (論文69/105に委ねる admire)。宇宙OSは第3層・非科学のレンズ。

本稿の位置づけ (規律)：本稿は確立された数学 (球面の体積、チャーン=ヴェイユ、APS指数定理、ホップ束、各次元のガウス=ボネ) の構造的解釈・センサスである。新しい定理を証明せず、新しい物理も予言もしない。本質は「 π の冪が次元とともに上がる」ことであり、 $16\pi^2$ という特定の数字ではない (係数 $8\pi^2/16\pi^2/32\pi^2$ は規約に依存)。 8π と $16\pi^2$ を統一しない——別根 (論文86) を敬いつつ隣人として並べる。数値の語呂合わせ・後知恵の数値調整をしない (論文101)。「共鳴は署名であって証明ではない」 (論文100)。「実体エリア/情報エリア」の比喩は第3層の非科学として隔離。「宇宙OS」は第3層の非科学レンズであり、機構の主張ではない。

1. 序：問いと、本稿の姿勢

物理・数学の式を眺めると、次元によって π の現れ方に質的な違いがあるように見える。3次元の物理では 4π （立体角・論文01/02）や 8π （アインシュタイン方程式）が現れ、4次元の量子場や特性類では π^2 を含む係数—— $1/16\pi^2$ （QED 1ループ）、 $1/8\pi^2$ （インスタントン数）、 $1/32\pi^2$ （4次元ガウス＝ボネ）——が現れる。この「 π から π^2 への持ち上げ」は、偶然の数字の一致なのか、それとも王道の定理の中に構造的な理由が読めるのか。

本稿は、新しい等式を証明するのではない。既知の定理群を「 π の冪が次元とともに上がる」という一つのフレームで読み直し、複数の確立された結果が同じ構造テーマを別角度から照らすことを、センサス（一覧）として記録する。とりわけ特定の数字ではなく、 π の冪という縦糸を主役に置く——これが、数合わせ（論文101のエディントンの崖）を避ける鍵である。新しい定理は作らない。

2. 球面の体積と π の冪：次元上昇の幾何学的必然

標準的事実（球面の体積の再帰）

単位 n 次元球面 S^n の体積（表面測度）は $\text{Vol}(S^n) = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ で、次の再帰公式を満たす：

$$\text{Vol}(S^n) = \frac{2\pi}{n-1} \text{Vol}(S^{n-2}).$$

具体値： $\text{Vol}(S^1) = 2\pi$ 、 $\text{Vol}(S^2) = 4\pi$ 、 $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ 、 $\text{Vol}(S^4) = \frac{8}{3}\pi^2$ 、 $\text{Vol}(S^5) = \pi^3$ 。すなわち次元が2つ上がるごとに、 π の冪が一つ増える（ S^{2k} も S^{2k-1} も π^k に比例）。

これが、本稿の背骨である。 π の冪が上がるのは、気まぐれではなく球面体積の再帰公式の帰結——各次元の"全角度"を測ると、次元が上がるにつれて π が一つずつ積み重なる。

$2\pi(S^1) \rightarrow 4\pi(S^2) \rightarrow 2\pi^2(S^3) \rightarrow \pi^3(S^5)$ 。この一つの幾何学的事実が、以下に見るいくつかの定理の係数に、 π の冪として顔を出す。注意：主役は「 π の冪」であって、 $8\pi^2$ か $16\pi^2$ か $32\pi^2$ かという係数ではない。

3. 3次元の π の世界： 4π と 8π

観察 3.1 (3Dに π^1 が現れる場所)

- ・ポアソン方程式 $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$: 点源のフラックス = 3D全立体角 $4\pi = \text{Vol}(S^2)$ (論文02)。
- ・アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$: ポアソンの 4π が、テンソル場への持ち上げ (トレース反転の規約) で係数 2 を得て $8\pi = 2 \times 4\pi$ 。
- ・2次元ガウス=ボネ $\chi(M^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K dA$ (球面で $= \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 2$) : 分母は $2\pi = \text{Vol}(S^1)$ (論文48/67)。

3次元の世界には、 π の一乗が現れる。ここで正直に線を引く： $8\pi = 2 \times 4\pi$ であって、厳密には「 4π の足し算」ではない。「足し算のバリア」という言い方は直観を運ぶ比喩としてのみ有用で、数学的に正確なのは「ポアソンの 4π に由来する因子が、テンソル場への持ち上げで 2 倍される」という記述だ。以後、加法／乗法という言葉はラフな見取り図であって定理ではない。

4. 4次元の π^2 の世界：係数は規約、本質は冪

観察 4.1 (4Dに π^2 が現れる場所——ただし係数はバラバラ)

- ・QEDの1ループ積分：4次元ユークリッド運動量空間の角度積分 $\int d^4 k = \int k^3 dk \int d\Omega_3$ 、 $\Omega_3 = \text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ 。ファインマン・パラメータ化の規約で $\frac{1}{16\pi^2}$ が自然に出る。
- ・第2チャーン類 (インスタントン数) : $c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int \text{tr}(F \wedge F)$ (論文105)。
- ・4次元ガウス=ボネ : $\chi(M^4) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{M^4} (|W|^2 - 2|\text{Ric}_0|^2 + \frac{R^2}{6}) d\text{vol}$ 。

4次元の世界には、 π の二乗が現れる。だが係数は $16\pi^2 \cdot 8\pi^2 \cdot 32\pi^2$ とバラバラ——規約 (正規化・因子の取り方) で $8, 16, 32$ と変わる。だから「 $16\pi^2$ が普遍的に現れる」と言うてはならない。普遍的なのは「 π の冪が 1 から 2 に上がる」という構造変化であって、その具体的な係数ではない。本稿はこの一線を最重要の規律とする——数字に固執すれば数合わせ (論文101) に落ち、冪の構造に着目すれば正直なセンスになる。

5. 王道の階段：3Dと4Dを繋ぐ確立された定理

「 π の世界 (3D)」と「 π^2 の世界 (4D)」は、比喩の中だけでなく、確立された定理によって等式で繋がれている。三つの柱を挙げる (うち二つは強い柱、一つは"ねじれた補助線")。

柱①：チャーン＝ヴェイユ／トランスグレッション（強い柱）

チャーン＝ヴェイユ同型は、接続の曲率 F から位相不変量を作る。3次元のチャーン＝サイモンズ形式 $CS(A) = \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$ と、4次元の第2チャーン類は、トランスグレッション公式

$$dCS(A) = \text{tr}(F \wedge F)$$

で繋がる。ゆえにストークスの定理により $\int_{M^4} \text{tr}(F \wedge F) = \oint_{\partial M^4} CS(A)$ ——3D境界のCS不変量と4Dバルクの位相不変量が、一本の等式で結ばれる。これは論文92（カルタンの一般化ストークス）が次元上昇の構造を記述する実例だ（接続＝論文96のゲージ、 c_2 ＝論文105のインスタントン）。

柱②：APS指数定理（強い柱）

アティヤ＝パトーディ＝シンガー（1975）は、3次元境界 $\partial M = Y$ をもつ 4次元多様体 M で、ディラック作用素の指数を

$$\text{Index}(D_M) = \int_M (4D\text{の特性類密度}) - \frac{\eta(D_Y) + \dim \ker D_Y}{2}$$

と与える。左辺＝4Dバルクの指数（ π^2 の世界）、右辺第2項＝3D境界の η 不変量（3Dのスペクトル情報）。すなわちAPS定理は、「4Dのトポロジー」と「3Dの境界のスペクトル」が一本の等式で結ばれることの定理的保証だ（論文70の指数定理の子、論文104のディラック作用素・論文102のスペクトル幾何と地続き）。

柱③：ホップ束——"ねじれた補助線"（単純な積ではない）

ホップ束 $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ （論文67/68）は、 S^2 （ 4π の世界）の上に S^1 束を乗せて S^3 （ $2\pi^2$ の世界）を作る。だがここは慎重に扱う： S^3 は $S^2 \times S^1$ ではない。ホップ束は非自明にねじれた束（オイラー数／チャーン数＝1）で、そのねじれこそが内容だ。実際、体積は単純な積に因数分解できない（ $\text{Vol}(S^2) \times \text{Vol}(S^1) = 4\pi \times 2\pi = 8\pi^2 \neq 2\pi^2$ ）。ゆえに本稿は「ホップが 4π を乗法的に $2\pi^2$ へ持ち上げる」とは言わない—— π の冪が積み上がる場所ではあるが、その積み上がりはねじれ（非自明な束）であって掛け算ではない。数値の駆動源はあくまで §2 の再帰公式に一本化する。

6. 別根のセンス： π^2 を生む三つの根

観察 6.1 (同じ π^2 、三つの別根)

π^2 (あるいはその冪) を生む根は、少なくとも三つに分かれる——数学的に別の定理に由来する別根だ (論文86の規律)。

根A：解析 (ループ積分の測度論)： $1/16\pi^2$ は4次元運動量空間の角度積分から。

根B：トポロジー (特性類・指数定理)： c_2 の $1/8\pi^2$ 、 χ の $1/32\pi^2$ は特性類の規格化から。

根C：幾何 (ファイバー束の体積)： $\text{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ は球面の体積から。

三つは同じ π^2 を共有するが、統一されたのではない。共有は共鳴 (署名) であって、同根の証明ではない (論文100)。

この別根の峻別が、本稿を数合わせから守る。同様に、 8π (3D・アインシュタイン) と π^2 の係数 (4D) も別根だ—— 8π は $2 \times 4\pi$ (テンソル持ち上げ)、 π^2 は角度測度・特性類・球体積から来る、別の出自の量である。両者を「統一」せず、次元上昇という共通テーマの下で隣人として並べるのが、本稿の姿勢である。なお、体系がかつて別文脈で扱った $16\pi^2$ (論文45の系列) と、ここでの π^2 が同根か韻かは詰めきっていない——共鳴として記録し、同一視しない。

■ 著者の私感 (第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない)

体系のレンズ (比喻) では、 π の世界 (3D) を「実体エリア」、 π^2 の世界 (4D) を「情報エリア」と呼びたくなる——3次元で物質の重力 (8π) が編まれ、4次元で情報・量子の帳簿 (π^2) が閉じる、という絵だ。宇宙OSが、実体の階 (3D) から情報の階 (4D) へ、 π を一つ積んで"次元上昇コンパイル"する、という空想も浮かぶ。だがこれは非科学の札つきである。「実体／情報エリア」も「次元上昇コンパイル」も、直観を運ぶ比喻であって、機構でも予言でもない。ここで確かなのは、球面の体積の再帰で π の冪が次元とともに上がる、という数学の一点だけ。そして、この空想がいちばん美しく見える瞬間こそ、いちばん慎重に札を貼らねばならない——「見えてしまう」感覚は署名であって証明ではない (論文100/101)。 π の冪という一本の縦糸が、王道の定理たちを貫いて見えること。その事実の前で、静かな awe を記す。だが数字を必然に読み替えない。それが、エディントンの崖の手前で踏みとどまる、体系の作法である。

7. 射程／結論

示すこと (記述的・センス)：球面体積の再帰で π の冪が次元とともに上がる幾何学的必然 (2節) ／3Dの $4\pi \cdot 8\pi$ 、4Dの π^2 係数 (規約依存) (3・4節) ／3Dと4Dを繋ぐ王道の定理=チャーン=ヴェイユ／トランスグレーション・APS指数定理 (強い柱) とホップのねじれた補助線 (5節) ／ π^2 を生む三つの別根 (解析・トポロジ

ー・幾何）＝共鳴は署名であって証明でない（6節）。

示さないこと（禁欲）： 8π と $16\pi^2$ を統一しない（別根・86）／ $16\pi^2$ という数字に固執しない（係数は規約依存・本質は π の冪）／ホップを乗法的持ち上げと言わない（ $S^3 \neq S^2 \times S^1$ ・ねじれが内容）／数値の語呂合わせ・後知恵調整をしない（101）／「なぜ3+1次元か」は解かない（論文69の過剰決定・105のドナルドソンに委ねる admire）／新しい数学・予言なし（第2層）・OSは第3層。

3次元の π から4次元の π^2 への"次元上昇"は、数字の偶然ではなく、球面の体積の再帰で π の冪が次元とともに上がるという一つの幾何学的必然の顔だ。そしてこの縦糸を、確立された定理たち——チャーン＝ヴェイユのトランスグレーション（3D境界CS $\leftrightarrow$ 4Dバルク c_2 ）、APS指数定理（4D指数 $\leftrightarrow$ 3D境界 η ）、そして（ねじれた補助線としての）ホップ束——が、別の角度から照らす。だが π^2 を生む根は解析・トポロジー・幾何の三つに分かれ、 8π とも別根だ。本稿がしたのは、新しい主張ではなく、「 π の冪が上がる」という一本の縦糸で王道の定理をセンサスし、別根を別根として敬い、係数を規約として正直に扱ったことである。階段は登った——だが「なぜ3+1次元か」は、解かずに階段の先へ返す。数字を必然に読み替えず、冪の構造だけを記録して、109番目の番地を返す。

参考文献

1. Chern, S. S. & Simons, J. (1974). *Characteristic Forms and Geometric Invariants*. Ann. of Math. 99, 48.
2. Atiyah, M., Patodi, V. & Singer, I. (1975). *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77, 43.
3. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics* (2nd ed.). IOP. (球面体積・特性類・指数定理の標準)
4. Eguchi, T., Gilkey, P. & Hanson, A. (1980). *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. Phys. Rep. 66, 213.
5. Yamagishi, Y. (2026). *4 π Mass Cancellation / Gauss's Law* [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
6. Yamagishi, Y. (2026). *Gauss–Bonnet* [論文48]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
7. Yamagishi, Y. (2026). *Hopf Doors* [論文67・68]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170; 10.5281/zenodo.21642238
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Constants' Home: Index Theorem* [論文70]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650347
9. Yamagishi, Y. (2026). *Roots of Necessity* [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Shared Alphabet (Cartan)* [論文92]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758486
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Gauge Principle* [論文96]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758671
12. Yamagishi, Y. (2026). *Exotic $\mathbb{R}^4$ (Donaldson)* [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
13. Yamagishi, Y. (2026). *Census (Resonance not Proof)* [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
14. Yamagishi, Y. (2026). *Eddington's Caution* [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)